Exercice 1. Centrale 2 2018 Fadel

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $R_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \cdots & \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{8} \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. (a) Écrire une fonction en python qui renvoie N_n à partir de la donnée de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Calculer $(N_n)^n$ pour $n \in \{2;5.10\}$. Quelle conjecture peut-on faire ?
   (c) Démontrer cette conjecture. On dit que N_n est une matrice nilpotente.
2. (a) Écrire une fonction en python qui renvoie R_n à partir de la donnée de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Calculer $(R_n)^2$ pour $n \in \{2;5.10\}$. Quelle conjecture peut-on faire ?
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que :
   $\forall x \in]-1;1[,\ \sqrt{1+x} = P_n(x) + \underset{n\to+\infty}{O}(x^n)$.
   Préciser ses coefficients et son degré.
   (b) Montrer que $(P_n(X))^2 - X - 1$ est divisible par X^n.
4. Démontrer la conjecture faite en **??**

Correction :

1. (a)
```
def Nn(n):
    # calcule les coefficients de la matrice Nn de l'énoncé
    # et la retourne dans un tableau numpy
     A=np.zeros((n,n))
     for i in range(n-1):
         A[i][i+1]=1
     return A
```
   (b) En réalisant la fonction python suivante :
```
def Nnn(n):
    # calcule les coefficients de la matrice (Nn)**n de l'énoncé et la retourne dans
un tableau numpy
    #n doit être un entier naturel supérieur ou égal à 2
    N=Nn(n)
    A=np.dot(N,N)
    for i in range(2,n):
        A=np.dot(A,N)
    return A
```
   et en l'appelant pour $n \in \{2;5;10\}$, on trouve $(N_2)^2 = O_2$, $(N_5)^5 = O_5$, $(N_{10})^{10} = O_10$. On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(N_n)^n = O_n$.
   (c) Comme N_n est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale et 0 est donc valeur propre de N_n de multiplicité n donc $\chi_{N_n} = X^n$, et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\boxed{(N_n)^n = O_n}$.
2. (a)
```
def Rn(n):
    # calcule les coefficients de la matrice Rn de l'énoncé et la retourne dans un
tableau numpy
    A=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        A[i][i]=1
        coeff=1/2
        for j in range(i+1,n):
```

```
                A[i][j]=coeff
                k=j-i+1
                coeff=coeff*(-1)*(k-1)*(2*k-2)*(2*k-3)/(4*k*(k-1)*(k-1)) # calcul des
coefficients par récurrence
     return A
```

(b) En effectuant la procédure suivante pour $n \in \{2;5;10\}$:

```
n=10
A=Rn(n)
np.dot(A,A)
```

on trouve $(R_2)^2 = I_2 + N_2$, $(R_5)^2 = I_5 + N_5$, $(R_{10})^2 = I_{10} + N_10$.
On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (R_n)^2 = I_n + N_n$.

3. (a) On sait que $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1;1[$:
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
donc est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle et admet un développement limité à tout ordre $n-1 \in \mathbb{N}$ qui est donné par la formule de Taylor Young, les coefficients de ce développement limité étant les même que la série de Taylor donnant le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, on a pour $\alpha = \frac{1}{2}$:
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists P_n \in \mathbb{R}_{n-1}(X),\ \forall x \in]-1;1[,\ \sqrt{1+x} = P_n(x) + \underset{n\to+\infty}{O}(x^n)}$ et on a :
$P_n(X) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} \times 1 \times 1 \times 3 \cdots \times (2k-3)}{2^k k!} x^k$
$P_n(X) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!2^k k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!2^k k!} x^k = 1 + \boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k} \binom{2k-2}{k-1} x^k}$.
On peut aussi le déduire en calculant les dérivées n-ièmes de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ par récurrence et en utilisant la formule de Taylor-Young.

(b) $(P_n(X))^2 - X - 1$ est un polynôme de degré $2n-2$, et d'après la question précédente, on a :
$\forall x \in]-1:1[,\ (P_n(x))^2 - x - 1 = \left(\sqrt{1+x} + \underset{n\to+\infty}{O}(x^n)\right)^2 - x - 1 = 1 + x + \underset{n\to+\infty}{O}(x^n) - 1 - x = \underset{n\to+\infty}{O}(x^n)$ car $\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x} = 1$ est finie. Donc $(P_n(X))^2 - X - 1$ est un polynôme Q de degré $2n-2$ dominé par $x \mapsto x^n$ au voisinage de 0, et en considérant le coefficient a_k du terme de degré k le plus petit tel que a_k est non nul, $\frac{Q(x)}{x^n} \underset{x\to 0}{\sim} a_k x^{k-n}$, donc pour que ceci soit borné au voisinage de 0, nécessairement $k \geqslant n$, donc Q est divisible par X^n. $\boxed{(P_n(X))^2 - X - 1 \text{ est divisible par } X^n}$

4. D'après la question précédente, $\exists Q \in \mathbb{R}[X],\ (P_n(X))^2 - X - 1 = X^n Q(X)$. Et en appliquant ceci pour la matrice N_n (c'est possible car les calculs matriciels vérifient les mêmes règles de calculs y compris la commutativité du produit ici car cela ne fait intervenir que des matrices puissance de N_n commutatives entre elles), on obtient :
$(P_n(N_n))^2 - N_n - I_n = N_n^n Q(N_n) = O_n$ d'après la question **??**.
Et on remarque de plus que d'après la question **??**, que $P_n(N_n) = R_n$, car $\forall k \in [[0;n-1]],\ N_n^k = (\delta_{i+k,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Donc on obtient $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n^2 = I_n + N_n}$.

Exercice 2. Centrale PSI 2017-Python [OdlT 2017 Centrale PSI n°162] idem exo n°47

Soit f une fonction non identiquement nulle, continue et positive définie sur $[0;1]$. On note $M = \sup_{x\in[0;1]} \{f(x)\}$.

On choisit $f_1 : x \mapsto x(1-x)(1+\cos(5\pi x))$

1. Tracer le graphe de f_1 sur $[0;1]$ et déterminer une valeur approchée de M.
2. Écrire une fonction prenant en argument n et retournant $I_n = \int_0^1 (f(x))^n \,\mathrm{d}x$.

3. Tracer le graphe de $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} I_k x^k$ sur $[-a;a]$ où $a = \frac{1}{M} + 0,1$ pour $f = f_1$. et $n \in \{10,20,30,40,50\}$. Commenter.
4. Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.
5. Soit $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$. Tracer les points $A_n(n,u_n)$ pour les 30 premières valeurs et $f = f_1$. Que conjecturer?
6. Étudier la monotonie et la convergence de (u_n).

Exercice 3. Centrale PSI 2017-Python [OdlT 2017 Centrale PSI n°164] idem exo n°1

Soit $P \in \mathbb{C}_p[X], Q \in \mathbb{C}_q[X]$ et u définie sur $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ par $u(A,B) = AP + BQ$.
Soit $\mathscr{B} = \big((1,0),(X,0),\cdots,(X^{q-1},0),(0,1),(X,1),\cdots,(X^{q-1},1),\cdots(0,X^{p-1}),(X,X^{p-1}),\cdots,(X^{q-1},X^{p-1})\big)$ une base de $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$

1. Donner la matrice $M_{P,Q}$ de u dans $\mathscr{B}$ en fonction des coefficients de P et Q.
2. Écrire un programme en python qui prend les listes associées aux coefficients de P et de Q en paramètre et donne la matrice $M_{P,Q}$.
3. On choisit $P(X) = X^4 + X^3 + 1$ et $Q(X) = X^3 - X + 1$. Montrer que :
$\exists!(A_0,B_0) \in \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_3[X]$ tel que $A_0P + B_0Q = 1$.
4. On choisit $P(X) = (X-1)(X-2)(X+2)$ et $Q_a(X) = X(X-1)(X-a)$.
Tracer sur $\big[-2,1;2,1\big]$ la courbe de la fonction $d : t \mapsto \det(M_{P,Q_t})$.

Exercice 4. Centrale PSI 2017-Python [OdlT 2017 Centrale PSI n°164]

Soit $P \in \mathbb{C}_p[X], Q \in \mathbb{C}_q[X]$ et u définie sur $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ par $u(A,B) = AP + BQ$.
Soit $\mathscr{B} = \big((1,0),(X,0),\cdots,(X^{q-1},0),(0,1),(X,1),\cdots,(X^{q-1},1),\cdots(0,X^{p-1}),(X,X^{p-1}),\cdots,(X^{q-1},X^{p-1})\big)$ une base de $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$

1. Donner la matrice $M_{P,Q}$ de u dans $\mathscr{B}$ en fonction des coefficients de P et Q.
2. Écrire un programme en python qui prend les listes associées aux coefficients de P et de Q en paramètre et donne la matrice $M_{P,Q}$.
3. On choisit $P(X) = X^4 + X^3 + 1$ et $Q(X) = X^3 - X + 1$. Montrer que :
$\exists!(A_0,B_0) \in \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_3[X]$ tel que $A_0P + B_0Q = 1$.
4. On choisit $P(X) = (X-1)(X-2)(X+2)$ et $Q_a(X) = X(X-1)(X-a)$.
Tracer sur $\big[-2,1;2,1\big]$ la courbe de la fonction $d : t \mapsto \det(M_{P,Q_t})$.

Exercice 5. Centrale PSI 2015 BEOS 2014-15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) (P) On définit $\forall i \in \{0,\dots,n\}$, $L_{n,i}(X) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{X-k}{i-k}$. Écrire une fonction python $L(n,i,x)$ renvoyant $L_{n,i}(x)$.
   (b) (P) On définit $\forall a = (a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $P_a(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i \times L_{n,i}(X)$. Écrire une fonction python $P(a,x)$ renvoyant $P_a(x)$.
   (c) (P) Écrire une fonction permettant le tracé sur un graphe de (k,a_k), $k \in \{0,n\}$ et de $P_a(x)$, x prenant une centaine de valeurs discrètes dans $[0,n]$.

   On définit alors $A_{n+1} = \{(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} / P_a(X) \in \mathbb{Z}_n[X]\}$, l'objectif étant de caractériser les éléments de cet ensemble.
   On définit la matrice $T_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{N})$ dont le coefficient général vaut $t_{i,j} = \binom{j}{i}$ si $i \leq j$ et 0 sinon, et $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $H_j(X) = \prod_{k=0}^{j-1} X - k$.

2. (a) Déterminer $U_n = T_n^{-1}$.
   (b) Déterminer B_n, la matrice de passage de $(L_{n,i})_{0\leq i\leq n}$ vers $(H_j)_{0\leq j\leq n}$, bases de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Déterminer Δ_n matrice diagonale telle que $B_n = {}^tT_n \times \Delta_n$.
   (d) Soit $C_n = B_n^{-1}$. Montrer que $\forall (i,j) \in [[0,n]]^2,\ c_{i,j} = \dfrac{(-1)^j}{j!(i-j)!}$ si $j \leq i$, 0 sinon.

   Pour tout $a \in \mathbb{Z}^{n+1}$ on associe $b \in \mathbb{R}^{n+1}$, avec $\forall j \in \{0,\dots,n\}$, $b_j = \sum\limits_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{i!\times(j-i)!} \times a_i$.
3. (a) Soit $a \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Montrer que $a \in A_{n+1}$ si et seulement si $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$.
   (b) (P) Écrire un fonction python $b(a)$ renvoyant la liste b associée à a comme définie précédemment. Vérifier que $a = (13,3,5,277,45) \in A_{n+1}$.

Exercice 6. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°992.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega_n = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $F_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice $\left(\omega_n^{(k-1)(l-1)}\right)_{1\leq k,l\leq n}$.

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie F_n.
   Afficher plusieurs matrices F_n .
2. Calculer avec Python le produit $F_n\overline{F_n}$.
3. Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie F_n^{-1}. Que peut-on conjecturer ?
4. Écrire une fonction Python qui prend deux entiers n et k en arguments et renvoie F_n^k.
   Que peut-on conjecturer ?
5. Démontrer les conjectures précédentes.
6. Déterminer les valeurs propres de F_n. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 7. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°993.

Soit n un entier naturel. On considère la matrice $A_{n+1} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{j-1,j} = j-1$, $a_{j+1,j} = n+1-j$ pour tout j, et dont tous les autres coefficients sont nuls.

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie A_{n+1}.
2. Déterminer avec Python les valeurs propres de A_{n+1}. Que peut-on conjecturer ?
3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à la matrice A_{n+1}.
   Montrer qu'il existe un polynôme Q ne dépendant pas de n tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = QP' + nXP$.
4. En déduire les éléments propres de u.
5. La matrice A_{n+1} est-elle diagonalisable ?

Exercice 8. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°994.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Préciser le module de ses valeurs propres.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 8$, $u_3 = 4$, $u_4 = 11$ et,
   pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+5} = \dfrac{1}{5}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4})$.
   (a) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et renvoie les $n+1$ premiers termes de cette suite.

(b) Afficher sur un graphique les 25 premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer concernant la convergence de u_n ?

(c) Réécrire la relation de récurrence à l'aide de la matrice A.

(d) Montrer que la suite de matrice $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice d'un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques.

(e) Trouver un vecteur non nul X tel que ${}^tAX = X$.

Exercice 9. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°998.

Soit $G \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n+1$, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. On définit g l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui au polynôme P associe le reste de la division euclidienne de PX par G.

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans cette question $n = 3$ et $G = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X = X(X-1)(X+1)(X+2)$.
   (a) Donner la matrice de g dans la base canonique.
   (b) g est-elle diagonalisable ?
   (c) Tracer sur $[-3,2]$ les fonctions polynomiales associées aux vecteurs propres de g.
3. On revient au cas général. L'application g est-elle diagonalisable ?

Exercice 10. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1002.

Une matrice carrée est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et si la somme de ses coefficients sur chaque ligne vaut 1.

1. Écrire une fonction Python `stoch(N)` qui renvoie une matrice de taille N stochastique avec des coefficients aléatoires.
2. Une matrice stochastique A est dite semi-vide si $a_{i,j} = 0$ quand $i+j$ est pair.
   Écrire une fonction Python `stoch2(N)` renvoyant une telle matrice.
3. Écrire une fonction Python `tracevp(A)` qui trace les valeurs propres de A. Que remarquez-vous ?
4. Soit A une matrice stochastique semi-vide. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $\overline{\lambda}$ et $-\lambda$ aussi.

Exercice 11. Centrale PC 2018 BEOS 2018 4647

On travaille dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $M \in E$.

1. La matrice MM^T est-elle diagonalisable ?
2. Cas particulier. $n = 3$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer avec Python les éléments propres de MM^T. Quel est le signe des valeurs propres ?
3. Montrer que, dans le cas général, les valeurs propres de MM^T sont positives.
4. Soit V la matrice formée des vecteurs propres de MM^T (matrice de passage lors de la diagonalisation). Que peut-on dire des vecteurs colonnes de MV ?
5. Montrer que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ il existe deux matrices orthogonales U, V éléments de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que U^TMV soit diagonale. (On pourra commencer par le cas où M est inversible).
6. Expliciter U et V pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. Centrale PSI 2015 Odlt 2014-15 n°187

1. Écrire et expliquer le code suivant :
   Avec un code Python que je n'ai pas. Peut-être est-ce une aide pour la suite ...
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver U orthogonale et S symétrique à valeurs propres positives, telle que $A = US$.
3. Montrer que de telles matrices U et S existent pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et en déduire qu'il existe deux matrices orthogonales V et W, et une matrice diagonale D telles que $VAW = D$.
4. Trouver V, W, D pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. BEOS 2016 Centrale PSI 352

On considère deux matrices M_n et T_n dans $\mathscr{M}_n(R)$ avec $M_n[i,j] = \min(i,j)$ et T_n triangulaire supérieure avec des 1 sur le triangle supérieur (y compris la diagonale).

1. Écrire un script Python permettant l'affichage de M_n pour $2 \leqslant n \leqslant 10$.
2. Calculer $\det(M_n)$ pour $n = 2, \dots, 10$. Conjecturer un résultat.
3. Écrire un script Python permettant l'affichage de T_n pour $2 \leqslant n \leqslant 10$.
4. Pour $n = 2, \dots, 10$, calculer ${}^tT_nT_n$. Conjecturer un résultat.
5. Démontrer les deux conjectures faites.
6. Montrer que M_n est diagonalisable à valeurs propres strictement positives.
7. Montrer que $\lambda_n = \max(\mathrm{Sp}(M_n)) \geqslant \dfrac{n+1}{2}$.
8. En essayant de minimiser les calculs, trouver M_n^{-1}.
9. Utiliser Python pour le calcul de M_n^{-1}.

Exercice 14. Centrale PSI 2017-Python [RMS 2017 Centrale PSI n° 937]

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$.
On dit que v est un vecteur de Krylov pour u si la famille $\left(v, u(v), u^2(v), \cdots, u^{n-1}(v)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

1. (a) Écrire une fonction prenant en argument une liste de n vecteurs et vérifiant si cette famille est une base de $\mathbb{R}^n$ ou non.
   (b) Écrire une fonction `estKrylov(M,v)` d'arguments une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur v de $\mathbb{R}^n$, indiquant si v est un vecteur de Krylov associé à M.
2. Soit v un vecteur de Krylov associé à u.
   Donner la forme de la matrice de u dans la base $\left(v, u(v), u^2(v), \cdots, u^{n-1}(v)\right)$.
3. Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$ un polynôme non nul annulateur de u.
   Montrer que la famille $\left(v, u(v), u^2(v), \cdots, u^d(v)\right)$ est liée.
4. En déduire que si u est diagonalisable et possède une valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à 2, alors il n'existe pas de vecteur de Krylov pour u.

Exercice 15. Centrale PSI 2015 avec Python PSI Odlt 2015 n° 180

Soit les polynômes de $\mathbb{R}_8[X]$ définie par $P_0 = 1, P_1 = 2X$ et $\forall n \in [\![1;7]\!], P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - P_{n-1}(X)$.

1. Calculer P_n pour $2 \geqslant n \geqslant 8$. Conjecturer la parité, le degré et le coefficient dominant de P_n. Démontrer ces conjectures.
2. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_8[X]$.
3. Calculer $(P_i|P_j)$ pour $0 \leqslant i, j \leqslant 8$. Qu'en déduire sur (P_n) ?
4. Exprimer la matrice de $\varphi(P) = 3XP' - P''$ dans la base des P_n.

Exercice 16. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1009.

. On pose, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $N(x,y)=\displaystyle\int_0^1 |x-ty|\,\mathrm{d}\,t$.

1. Vérifier que N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Tracer la courbe de la fonction $x\mapsto N(x,1)$ pour $x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$ avec Python.
3. Calculer $N(x,1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
4. En déduire la valeur de $N(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
5. Soit C le cercle unité d'équation $x^2+y^2=1$. Tracer la courbe de $x\mapsto N\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$ pour $x\in[-1,1]$ avec Python. Estimer les valeurs de $\sup\limits_{(x,y)\in C}\{N(C)\}$ et $\inf\limits_{(x,y)\in C}\{N(C)\}$ à l'aide du tracé.
6. Déterminer la valeur exacte de $\sup\limits_{(x,y)\in C}\{N(C)\}$.

Exercice 17. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1039.

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement deux boules rouges et une boule noire. À chaque étape, on tire au hasard une boule dans l'urne puis on la replace dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur.
On note X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée au k-ième tirage est rouge et 0 sinon.
On note S_n le nombre de boules rouges tirées après n tirages. On convient de poser $S_0=0$.

1. Écrire une fonction simulant n tirages et renvoyant la liste $[S_0,S_1,\cdots,S_n]$.
2. Écrire une fonction renvoyant $\mathrm{E}(S_n)$ pour n allant de 0 à 20.
   Tracer la ligne brisée représentant $\mathrm{E}(S_n)$ en fonction de n.
3. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![0,n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $S_n=k$.
4. Déterminer une relation entre $\mathrm{E}(S_{n+1})$ et $\mathrm{E}(S_n)$.
5. En déduire $\mathrm{E}(S_n)$ en fonction de n.
6. Déterminer la loi de X_k.

Exercice 18. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1044.

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$, dont la loi conjointe est donnée par :
$\mathbf{P}(X=i,Y=j)=\dfrac{ce^{-i}}{j^2+3j+2}$ pour tous $(i,j)\in\mathbb{N}^2$.

1. Déterminer la constante c.
2. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Soit $Z=5X+7Y$. Proposer une fonction en Python permettant de calculer $\mathbf{P}(Z=n)$ puis une fonction calculant la matrice colonne $(\mathbf{P}(Z=j))_{0\leqslant j\leqslant n}$.
6. Montrez que $\mathbf{P}(Z=n)>0$ pour tout $n>23$.

Exercice 19. Centrale PSI 2017-Python [OdlT 2017 Centrale PSI n°166] idem exo n°**??**

Un plateau de jeu de type monopoly comporte un circuit de 12 cases numérotées de 0 à 11. Le joueur commence sur la case 0.
On note Y_n la variable aléatoire égale au numéro sur lequel se trouve le joueur après le n-ième lancer d'un dé classique équilibré à six faces. On suppose que les lancers sont mutuellement indépendants.

1. Justifier que $\forall n\in\mathbb{N}, Y_n(\Omega)\subset[\![0;11]\!]$, et donner la loi de Y_0.

2. Écrire une fonction de paramètre n et évaluant Y_n pour une réalisation aléatoire du jeu.
3. Afficher les fréquences, sur la réalisation aléatoire de 5000 parties du jeu, de l'événement $(Y_n(\omega) = k)$ pour $n \in \{50, 100, 200, 500\}$.
4. Exprimer $\mathbf{P}(Y_{n+1} = k)$ en fonction des $(\mathbf{P}(Y_n = i))_{0 \leqslant i \leqslant 11}$.
5. Soit $U_n = {}^t(\mathbf{P}(Y_n = 0), \mathbf{P}(Y_n = 1), \cdots, \mathbf{P}(Y_n = 11)) \in \mathscr{M}_{12,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe une matrice P telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = PU_n$.
6. Exprimer U_n en fonction de U_0. P est-elle diagonalisable ?

Exercice 20. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1043.

Soit $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = 2^{Y_n}$ puis $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que X_n n'est pas d'espérance finie.
2. Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie une réalisation des n premiers termes de la suite $\left(\overline{X_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$.
3. Que peut-on conjecturer ? Le démontrer.
4. Calculer la loi de la variable $Z_n = \min(X_n, 2^n)$ puis préciser son espérance et sa variance.

Exercice 21. Centrale PSI 2017-Python [OdlT 2017 Centrale PSI n°173]

On utilise une pièce dont le lancer donne pile avec la probabilité $p \in]0;1[$.
On note E_n l'événement : "ne pas obtenir 2 piles d'affilée au cours des n premiers lancers". Soit $p_n = \mathbf{P}(E_n)$.

1. Écrire un programme en python qui prend n et p pour paramètres et renvoie **True** si E_n est réalisé et **False** sinon.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+2} = (1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n$. et en déduire que l'événement "obtenir deux piles d'affilée sur un nombre infini de lancers" est presque sûr.
3. Écrire une fonction en python de paramètre n qui donne la probabilité p_n, pour p fixé.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et T la variable aléatoire égale à n lorsque l'on obtient pile aux lancers $n-1$ et n, E_{n-1} étant réalisé.
   Écrire une fonction en python de paramètre d'entrée n donnant $\mathbf{P}(T = n)$.
5. Donner la fonction génératrice de T, montrer que T admet une espérance et la calculer.
6. Écrire un programme qui vérifie la valeur de cette espérance.

Exercice 22. Granger Centrale 2 2016

Soit F_n la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $\forall k \in \mathbb{N}, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \quad G_n = \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(3 + 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)\right)$.

1. Écrire F_k sur Python.
2. $\forall k \in [\![2;20]\!]$, comparer G_k et F_{k+1}. (on doit les trouver égaux)
3. Montrer que $G_k = \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(1 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$.
4. Montrer qu'il existe un polynôme U_n tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \sin((n+1)t) = \sin(t)U_n(\cos(t))$.
   (aide donnée dans l'énoncé : on pourra utiliser $V_0 = 1$, $V_1 = 2X$, $V_{k+2} = 2XV_{k+1} - V_k$)
5. Montrer que $\left|U_n\left(\frac{i}{2}\right)\right| = F_{k+1}$. utiliser la parité et l'imparité des polynômes U_n

6. Montrer que $\left|U_n\left(\frac{i}{2}\right)\right| = 4^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{1}{4} + \cos^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$. il ne se souvenait pas de l'expression. Cela doit être celle-ci en remarquant que $U_n(X) = 2^n \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)\left(X + \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$ si n est pair et X fois ça si n est impair
7. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, \quad F_{k+1} = G_k$.

Exercice 23. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1020.

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ un polynôme à coefficients réels de degré $n \geqslant 1$.

On pose, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $M(x,t) = |P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|P^{(k)}(x)\right|}{k!} t^k$.

1. Justifier que pour tout réel x, l'application $t \mapsto M(x,t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$; en déduire qu'il existe un unique réel positif t tel que $M(x,t) = 0$. On note ce réel $m(x)$.
2. Dans cette question on prend $P = X^2 - 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(x) = \sqrt{x^2 + \left|x^2 - 1\right|} - |x|$.
   Étudier la régularité de m.
3. Dans cette question on prend $P = (X-1)(X-2)(X-3)$.
   Écrire une fonction en Python qui prend en argument x et renvoie $m(x)$ à la précision 10^{-5}.
   On pourra utiliser la fonction `bisect` du module `optimize` de `scipy`; `bisect` prend trois arguments : une fonction h à une variable, dont on cherche un zéro, et deux réels a et b qui sont les bornes de l'intervalle où l'on cherche le zéro.
   Tracer le graphe de m.

Exercice 24. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1022.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, dont aucune racine n'est de module 1.

1. Justifier l'existence de $M(P) = \int_0^{2\pi} \ln\left(\left|P\left(e^{it}\right)\right|\right) \mathrm{d}\, t$.
2. Montrer qu'il existe un réel A, un entier naturel s supérieur ou égal à 1, des complexes $z_1, z_2, \cdots, z_s$ de modules différents de 1 et des entiers m_k tels que :
   $M(P) = A + \sum_{k=1}^{s} m_k M(X - z_k)$.
3. Écrire une fonction `malher(r,theta)` renvoyant la valeur de $M\left(X - re^{i\theta}\right)$.
   Quelle est la valeur de `M(2, 50)` ?
   Pour $r \in \{0.5, 1, 100, 2019\}$ représenter la fonction $\theta \mapsto \text{malher}(r,\theta)$ avec un pas de 0.1 pour θ.
   Que peut-on conjecturer ? .
4. Représenter $r \mapsto \text{malher}(r,\theta)$ pour r variant de 0 à 3 avec un pas de 0.1 ; puis $r \mapsto \text{malher}(r,\theta)$ pour r variant de 1 à 20 avec un pas de 0.1.
   Représenter sur un même graphique $r \mapsto 2\pi \ln(r)$. Que peut-on conjecturer ?
5. Démontrer la conjecture faite à la question 3..
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $X^{2n} - 1 = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + X^2\right)$.
7. Montrer la conjecture de la question 4.

Exercice 25. Centrale PSI 2017-Python [RMS 2017 Centrale PSI n° 959] idem exo n°43

Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant les conditions suivantes :

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g(t+1) - g(t) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$; $g(1) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} g'(t) = 0$.

1. Déterminer g' sous forme de somme d'une série de fonctions. *Ind.* Considérer $g'(t+1)-g'(t)$.
2. Déterminer g sous forme de somme d'une série de fonctions.
3. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite telle que $z_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $z_{n+1}=z_n+i\dfrac{z_n}{|z_n|}$.
   Montrer que cette suite est bien définie.
4. Calculer les dix premiers termes de la suite (z_n).
5. Tracer $z_1, z_2, \cdots z_{10}$ dans le plan complexe, et sur la même figure l'arc paramétré défini par $\begin{cases} x(t) &= \sqrt{t}\cos(g(t)) \\ y(t) &= \sqrt{t}\sin(g(t)) \end{cases}$
6. Formuler une conjecture puis la démontrer.
7. Trouver un équivalent de $g(n)$ lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 26. BEOS 2016 Centrale PSI 338 RMS 2016 PSI n° 1082 avec Python

Soit l'arc paramétré L : $\begin{cases} x(t)=\sqrt{\cos^2 t+4\cos t+3} \\ y(t)=\sin t \end{cases}$

1. Donner l'ensemble de définition de L et faire le tracer de la courbe avec **Python**. Justifier les symétries détectées. En déduire un domaine d'étude.
2. Étudier les variations et les éventuels points singuliers de L.
3. Donner l'expression des tangentes au point d'origine à la courbe L.
4. A l'aide de **Python**, donner une valeur approchée de la longueur de L.

1. On a $x(t)=\sqrt{(\cos(t)+3)(\cos(t)+1)}$, et $\forall t\in\mathbb{R}$, $(\cos(t)+3)(\cos(t)+1)\geqslant 0$, donc L est définie sur $\mathbb{R}$.
   On remarque une périodicité de période 2π et comme x est paire et y est impaire, on a une symétrie d'axe (Ox). D'où une étude sur $[0;\pi]$ et un support à tracer sur $[0;2\pi]$

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()
t=np.arange(0,2*np.pi,0.001)  # parcourt [0;2pi[ par pas de 0,001
n=len(t)
c=[math.cos(u) for u in t]
x=[math.sqrt(c[i]*c[i]+4*c[i]+3) for i in range(n)]
y=[math.sin(u) for u in t]
plt.plot(x,y)
```

2. La courbe semble présenter un seul point singulier en $t=\pi$ (en fait c'est un point où l'arc n'est pas dérivable à cause de la non dérivabilité de la fonction racine carrée), et on l'étudie avec un développement limité où avec le théorème de la limite de la dérivée :
   $x'(t)=-\dfrac{\sin(t)(\cos(t)+2)}{x(t)}$ strictement négative sur $]0;\pi[$ de limite -1 en π^- et valant 0 en 0. $y'(t)=\cos(t)$ strictement positive sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et strictement négative sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ de limite -1 en π^- et valant 1 en 0.
   D'où les variations et la forme de la courbe.
   Si Étude par développement limitée :
   $x(t+\pi)=\sqrt{\cos^2(t+\pi)+4\cos(t+\pi)+3}=\sqrt{\cos^2 t-4\cos t+3}=\sqrt{1-t^2-4+2t^2+3+\underset{t\to0}{o}(t^3)}=|t|\sqrt{1+\underset{t\to0}{o}(t^2)}$
   $y(t+\pi)=\sin(t+\pi)=-\sin(t)=-t+\dfrac{1}{6}t^3+\underset{t\to0}{o}(t^3)$
   Donc $M(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t+\underset{t\to0}{o}(t)$ si $t<0$ et $M(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}t+\underset{t\to0}{o}(t)$ si $t>0$.
   D'où deux demi-tangentes de vecteurs directeurs $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ en π^- et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ en π^+

3. D'après ce qui précède les tangentes en (0,0) ont pour équation $y = x$ et $y = -x$.
4. On utilise la méthode des rectangles pour calculer la longueur de la courbe. On utilise le programme précédent et on obtient environ 7,416 (7.416151806060884 est affiché) avec le programme :

```
plt.figure()
t=np.arange(0,2*np.pi,0.001)
n=len(t)
c=[math.cos(u) for u in t]
x=[math.sqrt(c[i]*c[i]+4*c[i]+3) for i in range(n)]
y=[math.sin(u) for u in t]
plt.plot(x,y)
xprime=[-y[i]*(c[i]+2)/x[i] for i in range(n)]
yprime=c
normederive=[math.sqrt(xprime[i]**2+yprime[i]**2) for i in range(n)]
val=0
for i in range(n):
    val+=normederive[i]  # on fait la somme des valeurs de l'intégrande sur tout l'intervalle de calcul
print(val*2*np.pi/n) #on affiche ((b-a)/n)fois la somme de f(a+k(b-a)/n) pour k allant de 0 à 2pi
```

Exercice 27. RMS 2016 Centrale PSI n° 1081 avec Python

Soit l'arc paramétré Γ : $\begin{cases} x(t) = (1+\cos(t))\cos(t) \\ y(t) = (1+\cos(t))\sin(t) \\ z(t) = 4\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$

1. Déterminer les points réguliers de Γ et le vecteur tangent unitaire en ces points.
2. Montrer que ce vecteur tangent forme un angle constant avec l'axe (Oz).
3. Calculer la longueur de Γ.
4. Tracer les projetés orthogonaux de Γ sur les plans (O,y,z), (O,z,x), (O,x,y).

Exercice 28. RMS 2016 Centrale PSI n° 1083 avec Python

Pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ soit $\varphi(t)$ $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$

1. Tracer avec **Python** le support de cet arc. Étudier les symétries, réduire l'intervalle d'étude, déterminer le comportement lorsque t tend vers -1.
2. On remarque la présence d'une boucle. Estimer numériquement la longueur de cette boucle.
3. Trouver une équation cartésienne de la courbe de la forme $F(x,y) = 0$.
4. Montrer que $\varphi(t_1), \varphi(t_2), \varphi(t_3)$ sont alignés si et seulement si $t_1 t_2 t_3 = -1$.

Exercice 29. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1030.

1. Pour $x \in \left]-1,1\right[$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1-2x\cos(\theta)+x^2\right)\mathrm{d}\theta$.
   Émettre une conjecture sur les valeurs de la fonction I.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \left]-1,1\right[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(\theta) = \dfrac{x^n\cos(n\theta)}{n}$.
   (a) Montrer que la série de terme général $\theta \mapsto u_n(\theta)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la fonction $f_x : \theta \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\theta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(c) En déduire que $I(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ et justifier la conjecture de la question 1 .

Exercice 30. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1036.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Soit $H : x \mapsto \sin(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}\,t - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}\,t$.

On note enfin (E) l'équation différentielle $y'' + y = f$.

1. Montrer que H est définie sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe sur $[0,10]$.
2. Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution g_a de (E) telle que $g_a(0) = a$ et $g_a'(0) = 0$. Tracer les graphes de g_a et $g_a - H$ sur $[0,10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
3. Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution h_a de (E) telle que $h_a(0) = 0$ et $h_a'(0) = a$. Tracer les graphes de h_a et $h_a - H$ sur $[0,10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.
4. Émettre une conjecture sur H et la prouver.
5. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$. Montrer que F est solution de (E).
6. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).
7. Que peut-on dire de $H - F$? Et de l'ensemble des solutions de (E) ?

Exercice 31. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1011.

Soit $Q : x \mapsto (x-1)\left(x^2-2\right)^2$, $\quad f : x \mapsto x - \dfrac{Q(x)}{Q'(x)}$

et enfin $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel n en argument et renvoie les n premiers termes de cette suite. Que peut-on conjecturer sur la limite de cette suite ?
2. Montrer que Q' est scindé à racines simples dans $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. On admet qu'il en est de même pour Q''.
3. Étudier les variations de f.
4. Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et trace les points de coordonnées $\left(k, \ln\left(u_k - \sqrt{2}\right)\right)$ pour tout $k \leqslant n$. Que peut-on conjecturer ?
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n > \sqrt{2}$ tel que $u_{n+1} - \sqrt{2} = f'(c_n)\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.
6. Montrer que la limite de f' en $\sqrt{2}$ par valeurs supérieures est $\dfrac{1}{2}$.
7. En déduire la preuve de la conjecture précédente.

Exercice 32. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1012.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = x\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{k}\right)$.

1. (a) Définir une fonction `P(n,x)` qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.
   (b) Tracer les graphes des $P_n(x)$ pour $x \in [0,1]$ et n variant de 1 à 10. Qu'observe-t-on ?
   (c) Définir une fonction `M(n)` qui renvoie l'abscisse x_n du maximum de P_n sur $[0,1]$. Pour k allant de 1 à 5, afficher $x_n \ln(n)$ avec $n = 10^k$. Qu'observe-t-on ?
2. (a) Montrer que P_n admet un maximum sur $[0,1]$, atteint en un unique point noté x_n.
   (b) En considérant $x \mapsto \ln(P_n(x))$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.
   (c) Trouver un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 33. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1014.

Pour a réel, on note $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0(a) = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(a) = \arctan\left(\dfrac{u_n(a)}{1+\sqrt{1+(u_n(a))^2}}\right)$.

1. Écrire une fonction `suite(N, a)` donnant tous les termes $u_n(a)$ pour $n \in [\![0, N]\!]$. Calculer `suite(3, 0)` puis `suite(10, 2.1718)`.
2. Calculer `suite(N, a)` pour $N = 10$ et a appartenant à `[1,4,10,100]`. Faire de même avec $2^n u_n(a)$.
3. Conjecture C_1 : convergence et limite de $(u_n(a))$?
   Conjecture C_2 : convergence et limite de $(2^n u_n(a))$?
4. Montrer que pour tout x réel, $|\arctan(x)| \leqslant |x|$. La conjecture C_1 est-elle vraie ?
5. Étudier la convergence des séries de terme général $u_n(a)$, $(u_n(a))^2$, $\ln\left(\dfrac{2u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right)$.
6. La conjecture C_2 est-elle vraie ?
7. Comparer avec Python $\arctan(x)$ et $2\arctan\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)$. Démontrer le résultat observé.

Exercice 34. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1015.

Soit a, b deux réels strictement positifs et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b}u_n$.

1. Avec Python, représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et $(a,b) \in \left\{\left(\frac{1}{2},1\right), \left(\frac{2}{3},1\right), \left(\frac{3}{2},2\right), \left(\frac{5}{3},2\right)\right\}$. Que peut-on conjecturer ?
2. Avec Python, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n = 10^6$, $u_0 = 1$ et pour les couples $(a,b) = \left(1,\frac{7}{6}\right)$, $\left(1,\frac{5}{3}\right)$, $(1,2)$, $(1,3)$. Que peut-on conjecturer ?
3. Soit $\gamma > 0$. On pose, pour tout $n > 0$, $v_n = \ln\left(n^\gamma u_n\right)$ et $w_n = u_{n+1} - u_n$.
   (a) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de w_n.
   (b) À quelle condition sur γ la série de terme général w_n converge-t-elle ?
   (c) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} cn^{a-b}$.
4. On suppose $b - a > 1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n$.
   Montrer que la série de terme général z_n converge et calculer sa somme.

Exercice 35. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1016.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $u_0 = 1$, $u_1 = a_1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = a_{n-1}u_{n-1} + u_{n-2}$. On étudie la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n-1}}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

1. Écrire une fonction qui prend en entrée les p premières valeurs de la suite (a_n) et retourne les p premières valeurs de (u_n).
2. Écrire une fonction qui prend en entrée les p premières valeurs de (a_n) et qui calcule S_p.
3. Tracer la ligne brisée reliant les points (n, S_n) pour $1 \leqslant n \leqslant 20$, lorsque la suite (a_n) est respectivement donnée par :
   (i) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ (ii) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ (iii) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (iv) $a_n = 1$.
   Faire une conjecture sur le comportement de la série de terme général v_n.
4. On suppose que la série de terme général a_n converge.
   Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

5. On suppose maintenant que la série de terme général a_n diverge.
   Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?
   Indication : On pourra étudier la nature de la série de terme général $u_{n-1}(u_n - u_{n-2})$.

Exercice 36. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1017.

On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\omega^n}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble-t-elle converger ? Si oui, donner une approximation de sa limite S.
2. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\omega - t}{1 + -t + t^2}\,\mathrm{d}\,t$. Justifier l'existence de I.
   Par la méthode des rectangles, trouver une valeur approchée de I.
3. Comparer I à S, que peut-on conjecturer ? Démontrer cette conjecture.
4. Donner la valeur exacte de I.
5. On considère une suite de complexes $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 3-périodique.
   On pose alors $u_n = \dfrac{a_n}{n}$ et $z_n = u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

Exercice 37. Centrale PSI 2017-Python [RMS 2017 Centrale PSI n° 944]

1. On définit la suite (F_n) par : $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Écrire un programme qui renvoie une liste contenant les 20 premiers termes de la suite (F_n).
2. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\alpha_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$, $\beta_n = \dfrac{F_n}{F_{n+3}}$ et $S(n,p) = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\alpha_n^{2k+1} + \beta_n^{2k+1}\right)$. Écrire un programme donnant les valeurs de $S(n,p)$ pour $0 \leqslant n, p \leqslant 9$ avec un arrondi convenable. Que peut-on conjecturer ?
3. Calculer $(F_{n+2} + iF_{n+1})(F_{n+3} + iF_n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 8$. Que remarque-t-on ?
4. En utilisant les propriétés des nombres complexes, démontrer la conjecture de la question 2.

Exercice 38. Centrale PSI 2017-Python [RMS 2017 Centrale PSI n° 946]

Soit $f : x \mapsto x^5 - x^3 + 2x - 1$.

1. Montrer que f a un unique zéro x_0 dans l'intervalle $[0;1]$.
2. Trouver une valeur approchée de x_0 à 10^{-8} près. Combien d'itérations ont été nécessaires ?
3. On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. Écrire une fonction calculant les n premiers termes de cette suite. Trouver un entier n tel que $u_n \approx x_0$ à 10^{-8} près.
4. On considère maintenant une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ s'annulant en un point x_0. On suppose qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que g' ne s'annule pas sur $I = \left]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon\right[$. On pose $M = \sup\limits_{x\in I} |f''(x)|$ et $N = \inf\limits_{x\in I} |f'(x)|$.
   Soit (u_n) une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{g(u_n)}{g'(u_n)}$.
   (a) En supposant que $u_n \in I$, exprimer $g(x_0) - g(u_n) - g'(u_n)(x_0 - u_n)$ sous forme d'une intégrale et en déduire que $|u_{n+1} - x_0| \leqslant \dfrac{M|u_n - x_0|^2}{2N}$.
   (b) Montrer que si $|u_0 - x_0|$ est assez petit, la suite (u_n) tend vers x_0 et vérifie $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $|u_n - x_0| \leqslant \left(\dfrac{M}{2N}\right)^{2^n - 1} |u_0 - x_0|^{2^n}$.

Exercice 39. Centrale PSI 2017-Python [RMS 2017 Centrale PSI n° 948, application de OdlT 2017 Mines-Ponts n° 115II]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $A_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ et $\mathscr{P}_n = \mathscr{P}(A_n)$ l'ensemble des parties de A_n. On appelle n-combinaison tout j-uplet $(p_1, p_2, \cdots, p_j)$ (avec $j \in [\![1; n]\!]$), formé de parties non vides de A_n et formant une partition de A_n (c'est-à-dire $p_1 \cup p_2 \cup \cdots \cup p_j = A_n$ et les p_i sont deux à deux disjoints). On note a_n le nombre de n-combinaisons. On pose $a_0 = 0$.
Par exemple, on a $a_1 = 1$. Pour $n = 2$, les 2-combinaisons sont $(\{1\}, \{2\})$, $(\{2\}, \{1\})$ et $(\{1, 2\})$, donc $a_2 = 3$.

1. (a) Quel est le nombre de n-combinaisons dont tous les éléments sont de cardinal 1 ?
   (b) Déterminer a_3.
2. (a) Soit B une partie de A_n de cardinal $k \in [\![1; n]\!]$.
   Quelle est la relation entre a_{n-k} et le nombre de n-combinaisons $(p_1, p_2, \cdots, p_j)$ telles que $p_1 = B$?
   (b) En déduire une relation entre a_n et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$.
   (c) Écrire un programme qui, pour $n \in \mathbb{N}$, renvoie a_n. Déterminer alors a_n pour $n \in [\![1; 10]\!]$.
3. On pose $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$ et $c_n = (\ln(2))^{-n}$.
   (a) Montrer que $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_{n-k}}{k!}$.
   (b) Tracer sur Python les points $\left(n, \dfrac{c_n}{2}\right)$, (n, b_n) et (n, c_n). Que peut-on dire sur b_n ?
   (c) Démontrer cette conjecture.
   On pourra utiliser le résultat $\mathrm{e}^{\ln(2)} \leqslant 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(\ln(2))^k}{k!} \right) + 2\frac{(\ln(2))^n}{n!}$ après l'avoir démontré.

Exercice 40. Centrale PSI 2017-Python [OdlT 2017 Centrale PSI n°170]

1. Calculer, en utilisant Python, les 50 premiers termes de la suite de terme général $u_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$.
2. Étudier la monotonie, la convergence et déterminer un équivalent de (u_n).
3. On note $e = (e_n)$ une suite de 0 ou de 1. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e_n u_n$.
   On notera $S(e)$ sa somme.
4. Montrer que S prend ses valeurs dans $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Pour $e = (0, 1, 0, 1, \cdots)$. Trouver à 10^{-5} près la valeur de $S(e)$.
6. Soit $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer qu'il existe une suite e telle que $x = S(e)$.
7. Écrire, à l'aide de python, une fonction déterminant les n premiers termes de la suites e pour un x donné.

Exercice 41. BEOS 2016 Centrale PSI 336

On donne la suite de fonctions définie de la façon suivante :
$\forall x \in \mathbb{R} : \ f_0(x) = x \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \ f_{n+1}(x) = 3 f_n(\frac{x}{3}) - 4 (f_n(\frac{x}{3}))^3$.

1. Écrire une fonction **Python** qui retourne f pour n et x donnés.
2. Représenter alors f pour n allant de 1 à 5 sur l'intervalle $[0, 4\pi]$, on restreindra l'axe des ordonnées à $[-3; 3]$.
3. Soit $\Phi(x) = 3x - 4x^3$.
   (a) Représenter Φ sur $[-1, 1]$ et $x \mapsto \Phi(\sin x)$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) Démontrer l'inégalité suivante : $\forall x, y \in [-1, 1], \ |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant 9|x - y|$.
4. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \ |f_n(x) - \sin x| \leqslant 9^n \left| \frac{x}{3^n} - \sin(\frac{x}{3^n}) \right|$.
   ► Indication : on pourra pour un entier n fixé prendre p un entier et utiliser $v_p = f_p(\frac{x}{3^{n-p}})$ et $w_p = \sin(\frac{x}{3^{n-p}})$).
5. En déduire une conséquence sur la convergence de la suite de fonctions (f_n).

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve.

4. On pourra trouver une forme plus simple de $\Phi(\sin x)$ et calculer $\Phi(v_p)$ et $\Phi(w_p)$.

Commentaire du modérateur : Initialement, à la question 4, il était question d'une majoration sur $[-A, A]$ avec $A \geqslant 0$ tel que $\frac{A}{3^n} \leqslant 1$ pour tout entier n, ce qui revient à dire que $A \leqslant 1$. Ce qui ne m'a pas paru clair, donc en accord avec l'élève j'ai pris $A = 1$. Puis, à la question 5, rien n'empêche de montrer que la convergence uniforme sur $[-A, A]$ implique celle sur $[-3A, 3A]$, d'où on déduit la convergence uniforme sur tout segment (et plus aisément la convergence simple sur $\mathbb{R}$)

Exercice 42. Centrale PSI 2018 BEOS 2018 4651

On pose la suite $(f_n)_n$ telle que : $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;1]$, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x 2\sqrt{f_n(t)}\,dt$

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1$, $b_{n+1} = \dfrac{4\sqrt{b_n}}{a_n + 2}$

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;1]$, $f_n(x) = b_n x^{a_n}$
2. Ecrire sur Python la fonction `ab(N)` qui, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, renvoie les couples (a_n, b_n) pour $n \in \{0, \dots, N\}$. La tester pour $N = 5$. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semblent-elles converger ? Si oui, vers quelle limite ?
3. Tracer les fonctions f_2, f_5, f_{10}, f_{15}, f_{20}. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble-t-elle converger simplement ? Si oui, vers quelle fonction ?
4. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
5. Montrer que la suite $(2^{n+1}\ln(b_{n+1}) - 2^n \ln(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En déduire que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.

Exercice 43. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1024.

Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}^0([0,1]),\ f(0) = 0, f(1) = 1\right\}$. Pour toute fonction $f \in E$, on définit $g = \varphi(f)$ par :

$g(x) = \dfrac{f(3x)}{2}$ si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3}$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{2}$ si $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{2}{3}$ $\quad$ et $\quad g(x) = \dfrac{1}{2}(1 + f(3x-2))$ si $\dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1$.

1. Montrer que $g \in E$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^n(f) \in E$ (où $\varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$).
2. (a) Écrire une fonction en python qui renvoie $\varphi(f)$.
   (b) Écrire une fonction `iter(n,f)` qui renvoie $\varphi^n(f)$.
   (c) Tracer les courbes des fonctions $\varphi^n(f)$ pour les premières valeurs de n et $f : x \mapsto x$.
   (d) Même question avec $f : x \mapsto \left(\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)^2$. Que peut-on remarquer ?
3. Montrer que φ est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne.
4. Montrer que la série $\sum(\varphi^{n+1}(f) - \varphi^n(f))$ est normalement convergente.
   En déduire la convergence uniforme de la suite $\left(\varphi^n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Montrer que la limite de cette suite ne dépend pas de la fonction f. On la note f_∞.
6. Montrer que f_∞ est l'unique fonction de E qui vérifie $\varphi(f_\infty) = f_\infty$.

Exercice 44. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1027.

1. Écrire une fonction qui prend en entrée un entier n et retourne une valeur approchée de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,t}{(1+t^2)^n}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n I_k$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{I_k}{k}$.
   Représenter les suites (s_n) et (S_n) pour n compris entre 1 et 100. Conjectures ?

4. Prouver ces conjectures et donner la valeur de la somme le cas échéant.

Exercice 45. Centrale PSI 2017-Python [RMS 2017 Centrale PSI n° 958]

On pose $f_n(x) = \prod_{0\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{x+i}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que F et G sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Tracer les courbes de F et G sur des intervalles raisonnables. Tracer ensuite $\frac{F}{G}$. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Justifier l'existence d'une famille $(a_{i,n})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_{i,n}}{x+i}$.
   À l'aide d'équivalents au voisinage des points $-i$, exprimer les coefficients $a_{i,n}$.
   (b) Montrer alors la conjecture faite à la question précédente.

Exercice 46. Centrale PSI 2017-Python [RMS 2017 Centrale PSI n° 959]idem exo n°17

Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant les conditions suivantes :
$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g(t+1) - g(t) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$; $g(1) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} g'(t) = 0$.

1. Déterminer g' sous forme de somme d'une série de fonctions. *Ind.* Considérer $g'(t+1) - g'(t)$.
2. Déterminer g sous forme de somme d'une série de fonctions.
3. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite telle que $z_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = z_n + i\frac{z_n}{|z_n|}$.
   Montrer que cette suite est bien définie.
4. Calculer les dix premiers termes de la suite (z_n).
5. Tracer $z_1, z_2, \cdots z_{10}$ dans le plan complexe, et sur la même figure l'arc paramétré défini par $\begin{cases} x(t) &= \sqrt{t}\cos(g(t)) \\ y(t) &= \sqrt{t}\sin(g(t)) \end{cases}$
6. Formuler une conjecture puis la démontrer.
7. Trouver un équivalent de $g(n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 47. BEOS 2016 Centrale PSI 341

Soient $I(p,q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ et $S(p,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nq+p}$ avec $p, q \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Justifier la définition des deux fonctions précédentes.
2. Écrire sur **Python** un programme permettant de calculer $I(p,q)$ à 10^{-5} prËs.
3. Écrire sur **Python** un programme permettant de calculer $S(p,q)$ à 10^{-5} prËs.
4. Calculer informatiquement $I(1,2)$, $I(2,2)$ et $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
5. Tracer les fonctions $x \mapsto I\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto S\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$ pour $x \in]0,1]$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter $I\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.
7. Calculer $I(p,q)$ et $S(p,q)$ pour $(p,q) \in \{(1,2),(2,2)\}$. Que conjecture-t-on ?
8. Démontrer que $I(p,q) = S(p,q)$ pour $p, q \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 48. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1021.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.

1. (a) Représenter graphiquement f sur $[-2,2]$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = f(x)\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}$.
Donner P_n pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.

(c) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$? Est-elle développable en série entière ?

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)f(1-x)$ et $h(x) = \alpha^{-1}\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t$, avec $\alpha = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}\,t$.
Tracer g et h sur un intervalle convenable. Sont-elles $\mathscr{C}^\infty$?

3. Construire une fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geqslant 1$ et $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice 49. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1023.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$, on pose $\theta_n(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1 - x^{2^k}\right)$.

1. Créer une fonction `dessin(n)` qui trace les graphes des θ_k sur $[-1,1]$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.
2. Établir la convergence sur $]-1,1[$ de la suite (θ_n) vers une fonction θ ; montrer que θ est continue sur $]-1,1[$, vérifie $\theta_(x) = (1-x)\theta\left(x^2\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$ et ne s'annule pas sur $]-1,1[$.
3. Trouver toutes les fonctions f continues de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = (1-x)f\left(x^2\right)$.
4. On admet que θ est développable en série entière : $\theta(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.
Donner a_0 et montrer que $a_{2n} = a_n$ et $a_{2n+1} = -a_n$ pour tout entier naturel n.
5. Créer une fonction `coeff(n)` qui calcule a_n.

Exercice 50. Centrale PSI 2017-Python [OdlT 2017 Centrale PSI n°162]

Soit f une fonction non identiquement nulle, continue et positive définie sur $[0;1]$. On note $M = \sup\limits_{x\in[0;1]}\{f(x)\}$.
On choisit $f_1 : x \mapsto x(1-x)(1+\cos(5\pi x))$

1. Tracer le graphe de f_1 sur $[0;1]$ et déterminer une valeur approchée de M.
2. Écrire une fonction prenant en argument n et retournant $I_n = \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n\,\mathrm{d}\,x$.
3. Tracer le graphe de $S_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k x^k$ sur $[-a;a]$ où $a = \dfrac{1}{M} + 0,1$ pour $f = f_1$. et $n \in \{10,20,30,40,50\}$.
Commenter.
4. Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.
5. Soit $u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$. Tracer les points $A_n(n,u_n)$ pour les 30 premières valeurs et $f = f_1$. Que conjecturer ?
6. Étudier la monotonie et la convergence de (u_n).

Exercice 51. Centrale PSI 2017-Python [OdlT 2017 Centrale PSI n°168, RMS 2017 Centrale n°960, ressemble à , RMS 2017 Centrale n°948]

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2-\mathrm{e}^x}$, et on note $\forall n \in \mathbb{N}$, $a(n) = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a(n-k)}{k!}$. (On pourra utiliser la fonction $x \mapsto (2-\mathrm{e}^x)f(x)$).
2. Écrire, avec Python, une procédure permettant de calculer $a(n)$ pour $n \in [\![0;10]\!]$.
3. Tracer les courbes $(n,a(n))$, $\left(n, \dfrac{1}{(\ln(2))^n}\right)$ et $\left(n, \dfrac{1}{2(\ln(2))^n}\right)$. En déduire le rayon de convergence de $\sum a(n)x^n$.
On note S sa fonction somme.
4. Tracer l'approximation de la courbe de S grâce aux sommes partielles pour $n \in [\![0;6]\!]$.

5. Tracer la courbe de f sur $[0;10]$. que peut-on en déduire ? Le démontrer.

Exercice 52. Centrale PSI 2017-Python [RMS 2017 Centrale PSI n° 957]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\theta_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$, par $\theta_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - x^{2^k}\right)$.

1. Tracer θ_{10}.
2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(\theta_n(x))$ en fonction de x.
3. Montrer que la limite θ de la suite (θ_n) est continue sur $]-1;1[$ et vérifie la relation $\theta(x) = (1-x)\theta\left(x^2\right)$ pour tout $x \in [-1;1]$.
4. Montrer que θ ne s'annule pas sur $]-1;1[$.
5. Trouver toutes les fonctions $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = (1-x)f\left(x^2\right)$ pour tout $x \in]-1;1[$.
6. On admet que θ est développable en série entière sur $]-1;1[$. Déterminer les coefficients du développement.
7. Démontrer le résultat admis à la question précédente.

Exercice 53. Centrale PSI 2017-Python [OdlT 2017 Centrale PSI n°177]

1. Donner l'ensemble de définition D de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
2. Tracer, avec python, la représentation graphique de f à 10^{-5} près.
3. Montrer que $g : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}\,t$ est définie sur D et est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1;1[$.
4. Tracer, avec python, la représentation graphique de g et conjecturer un lien entre f et g.
5. Calculer $f'(x)$ pour $x \in D \cap \mathbb{R}_+^*$ et démontrer la conjecture précédente.
6. Déterminer, pour $x \in D \cap \mathbb{R}_+^*$, une relation entre $g(1)$, $g(x)$, $g(1-x)$ et une autre fonction que l'on précisera. (On pourra faire une intégration par parties et/ou un changement de variable).
7. En déduire g puis f sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 54. Centrale avec Python PC Odlt160

1. Montrer que la fonction φ donnée par $\varphi(x) = \int_0^x \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Donner, à l'aide d'un programme informatique, l'allure de son graphe.
3. Montrer, à l'aide d'une linéarisation, que φ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Vérifier avec l'outil informatique.
4. Montrer que $\varphi(\pi) > 0$ et en donner une valeur approchée.
5. Pour $n > 1$ et $p \in [\![0;n]\!]$, montrer qu'il existe $x_p \in [0;\pi]$ tel que $\varphi(x_p) = \frac{p}{n}\varphi(\pi)$.
6. On pose $u_n = \sum_{p=0}^{n} x_p^2$. Montrer avec Python que u_n tend vers $\frac{3}{4\varphi(\pi)}$ puis le démontrer mathématiquement.

Exercice 55. Centrale PSI 2015avec Python PSI Odlt185

1. Trouver la limite en 0 de $f(x) = \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1}$. Tracer f avec Python.
2. Est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

3. Trouver un réel a pour que $\left|\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant 10^{-5}$ (on pourra résoudre $y^2 - y - 1 \geqslant 0$ et utiliser $\mathrm{e}^t - 1 \geqslant \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$).
4. Calculer $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}\,t$ par la méthode des rectangles ou des trapèzes.
5. Trouver une suite (a_n) dans $\mathbb{Q}_+^*$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \sum_{n\geqslant 1} a_n$ et en déduire une approximation de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ à 10^{-5} près. Comparer le résultat avec celui précédemment obtenu. Peut-être ici il y a des séries entières, mais je ne suis pas sûr !
6. Calculer $\dfrac{\pi\mathrm{ch}(\pi) - \pi\mathrm{sh}(\pi)}{2\mathrm{sh}(\pi)}$ et en déduire un lien avec ce qui précède.

Exercice 56. Centrale PSI 2015 avec Python PSI Odlt192

On note $\sigma(n)$ le cardinal de $H_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2, n = 2p + 3q\}$.

1. Justifier l'existence de $\sigma(n)$ pour tout entier naturel n.
2. Expliciter $\sigma(0)$, $\sigma(1)$ et $\sigma(2)$. Montrer que pour $n \geqslant 3$, $\sigma(n) \geqslant 1$.
3. Écrire une fonction Python qui calcule $\sigma(n)$ et le donner pour $n \in [\![0;25]\!]$.
4. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum \sigma(n)x^n$, et montrer que lorsqu'elle converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n = \dfrac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$. probablement produit de Cauchy
5. Écrire une fonction Python basée sur cette série entière et permettant de retrouver le résultat de la première question. je ne suis pas sûr de quelle première question il s'agit !

Exercice 57. Centrale PSI 2015 avec Python PSI Odlt193

1. Construire à l'aide du logiciel, le tableau b tel que $\forall (i,j) \in [\![0;12]\!]^2, b_{i,j} = \binom{i}{j}$ si $i \geqslant j$ et $b_{i,j} = 0$ sinon.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la série de terme général $u_{n,k} = \dfrac{k^n}{k!}$ converge quand k tend vers $+\infty$.
   On note A_n cette somme.
3. Donner les valeurs exactes de A_0 et A_1 et exprimer A_{n+1} en fonction des A_i pour $i \in [\![0;n]\!]$. En déduire les valeurs exactes de A_n pour $n \in [\![0;12]\!]$.
4. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{A_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence R au moins égal à 1. (On pourra montrer que $A_n \leqslant n!e$).
5. On note f la somme de cette série entière, définie sur $]-R;R[$. Représenter, sur le logiciel, $f(x)$, sur un intervalle bien choisi.
6. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène sur un intervalle à préciser.
7. Exprimer $f(x)$ sans le signe $\sum$.

Exercice 58. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1035.

. On considère l'équation différentielle (E) : $\left(1+x^2\right)y'' + xy' - \dfrac{y}{4} = 0$.

1. Existe-t-il une solution y de (E) sur $]-1,1[$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = \sqrt{2}$? Si oui, est-elle unique ?
2. Si une telle solution existe, la représenter graphiquement à l'aide de Python.
3. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

4. Soit $f_1 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de (E) développable en série entière telle que $a_0 = 0$ et $a_1 = \sqrt{2}$.
   Quel est le rayon de convergence de cette série ?

Exercice 59. Centrale PSI 2019 Python RMS 2019 n°1037.

Soit $\alpha > 0$, $v \in \mathbb{R}$ et (S) le système différentiel $\begin{cases} x''(t) & = -\alpha x'(t) \\ y''(t) & == -\alpha y'(t) - 1 \end{cases}$.

1. Tracer la solution de (S) telle que $x'(0) = y'(0) = v$ et $x(0) = y(0) = 0$, pour différentes valeurs de ? α et v. Interpréter qualitativement.
2. Résoudre le système.
   Montrer que la courbe solution a pour équation $y = f(x)$, où $f : x \mapsto x\left(1 + \frac{1}{\alpha v}\right) + \frac{1}{\alpha^2} \ln\left(1 - \frac{\alpha x}{v}\right)$.

Exercice 60. Centrale PSI 2017-Python [RMS 2017 Centrale PSI n° 941]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\varphi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_M(X) = {}^tXMX$.

1. Exemple : dans cette question, $n = 2$ et $M = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Tracer la surface d'équation $z = \varphi_M(x, y)$ pour $(x, y) \in [-2; 2]^2$.
   (b) Déterminer les éventuels extrema locaux de φ_M.
   (c) Montrer que φ_M est surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. On revient au cas général.
   (a) Montrer que M peut se décomposer en somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique A. Cette décomposition est-elle unique ?
   (b) Écrire en Python une fonction qui donne la partie symétrique d'une matrice carrée M.
   (c) Montrer que $\varphi_M = \varphi_S$.
3. On suppose que M est nilpotente.
   (a) Montrer que $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(S)$.
   (b) Trouver le spectre de M.
   (c) Déterminer $\varphi_M(\mathbb{R}^n)$.