Quelques exercices tombés aux oraux en 2017

1 Algèbre

Exercice 1. Mines-Ponts PSI 2017
Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ deux à deux distincts.
Montrer que $(P(X+a_i))_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2. Mines-Ponts PSI 2017
Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det(A)=\det(B)=\det(A-B)=\det(A+B)=0$.
Montrer que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\det(xA+yB)=0$.

Exercice 3. Mines-Ponts PSI 2017
On définit, pour $n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$ et $x\in\mathbb{R}$: $D_n(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \frac{x^2}{2!} & x & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$
Montrer que D_n est dérivable et calculer D_n'. En déduire la valeur de D_n. *corrigé

Exercice 4. Mines-Ponts PSI 2017
Soit $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2=0$.
Déterminer la dimension de $C_A=\left\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM=MA\right\}$.

Exercice 5. Mines-Ponts PSI 2017
Soit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente et $p\in\mathbb{N}$ son indice de nilpotence (*i.e.* le plus.petit entier naturel p tel que $M^p=O_n$)

1. Montrer que $p\leqslant 3$.
2. On suppose que $p=3$. Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. On suppose que $p=2$. Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Soit $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\det(A)=\operatorname{tr}(A)=0$.

Exercice 6. Mines-Ponts PSI 2017

1. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentes et $t\in\mathbb{C}$.
   (a) Si A et B commutent, $A+tB$ est-elle nilpotente ?
   (b) Que dire si A et B ne commutent pas ?
2. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconques. On suppose qu'il existe $t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$ des nombres complexes deux à deux distincts tels que $A+t_iB$ est nilpotente pour tout $i\in[[1;n+1]]$.
   (a) Montrer qu'il existe des matrices C_k telles que $(A+tB)^n=\sum_{k=0}^{n}C_kt^k$.
   (b) Les matrices A et B sont-elles nilpotentes ?

Exercice 7. Mines-Ponts PSI 2017

Soit E et F deux espaces vectoriels (pas nécessairement de dimension finie).

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ deux applications linéaires telles que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.
   Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ possède un supplémentaire dans E si et seulement s'il existe $v \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que u et v vérifient les hypothèses de la question précédente.

Exercice 8. Mines-Ponts PSI 2017

On note S_n le groupe des permutations de $\{1;2;\cdots;n\}$. Soit $\sigma \in S_n$.

1. Rappeler le cardinal de S_n. Montrer que $\varphi_\sigma : S_n \to S_n$ définie par $\varphi_\sigma(\tau) = \tau \circ \sigma$ est bijective.
2. Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note f_σ l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ telle que :
   $\forall i \in [[1;n]]$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
   Montrer que $p_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un projecteur et donner ses caractéristiques.

Exercice 9. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $i \in [[1;n]]$, on note $L_i = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{i,k}|$.

1. On suppose que $\forall i \in [[1;n]]$, $|a_{i,i}| > L_i$. Montrer que A est inversible.
2. On suppose que $\forall (i,j \in [[1;n]]^2$ tels que $i \neq j$, $|a_{i,i}a_{j,j}| > L_i L_j$. Montrer que A est inversible.

Exercice 10. Mines-Ponts PSI 2017

Résoudre l'équation suivante dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A^2 + (-1)^n \det(A) I_n = 0$.

Exercice 11. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$.
Montrer que $\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA)$.

Exercice 12. Mines-Ponts PSI 2017

1. Montrer que $E = \mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on précisera la dimension.
2. Donner une base de E dans laquelle la matrice de ψ défini par $\psi(P) = P'$ ne contient que des 0 et des 1.
3. Soit $Q \in E$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E$ tel que $P - P' = Q$.
4. Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geqslant 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.
   (on pourra s'intéresser à l'application f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x)\mathrm{e}^{-x}$).
5. Montrer que si P est scindé à racines simples alors Q l'est également.

Exercice 13. Mines-Ponts PSI 2017

Soit f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(X) = nXP(X) - (X^2-1)P'(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Résoudre, sur $[-1;1]$, l'équation différentielle : $nxy - (x^2-1)y' = \lambda y$ et donner les solutions polynomiales.
3. Réduire f.
4. Déterminer le déterminant et la trace de f. Que dire de son rang?

Exercice 14. Mines-Ponts PSI 2017

Trouver les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec les matrices de rang 1.

Exercice 15. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$
Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ *corrigé

Exercice 16. Centrale PSI 2017

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n = X^n - X + 1$.

1. Montrer que P_3 possède trois racines distinctes b_1, b_2, b_3.
2. Calculer $\begin{vmatrix} 1+b_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b_3 \end{vmatrix}$.
3. Généraliser ce qui précède pour tout $n \geqslant 3$.

Exercice 17. Centrale PSI 2017

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ définie par $\forall P \in E,\ L(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer l'image de $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par L.
2. Déterminer la dimension puis une base du noyau de L.
3. Soit $(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $-1 \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant 1$. Montrer que, pour tout $i \in \{0; 1; \cdots; n\}$, il existe un unique polynôme $P_i \in E$ tels que $\forall j \in \{0; 1; \cdots; n\},\ P_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
4. Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de E.
5. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\forall P \in E,\ L(P) = \lambda_0 P(x_0) + \lambda_1 P(x_1) + \cdots + \lambda_n P(x_n)$.

Exercice 18. Centrale PSI 2017

On note $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, définie par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$, $Q_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - k)$.

1. Calculer $\Delta(Q_n)$. Montrer que $(Q_0, Q_1, \cdots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer le noyau et l'image de Δ.
3. Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ une application linéaire telle que $f \circ \Delta = \Delta \circ f$.
   Montrer qu'il existe une unique suite de réels $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \Delta^k(P)$.

Exercice 19. Centrale PSI 2017

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.
2. Montrer que la suite de terme général $\dim\left(\mathrm{Ker}(u^k)\right)$ est constante à partir d'un certain rang, que l'on notera d dans la suite.
3. On note $r_u = \inf\left\{k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})\right\}$.
   (a) Montrer que $r_u \leqslant n$.
   (b) Montrer que $d = r_u$.
   (c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^d) \oplus \mathrm{Im}(u^d)$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^k)$ et $\mathrm{Im}(u^k)$ sont supplémentaires si et seulement si $k \geqslant d$.

Exercice 20. Centrale PSI 2017

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}({}^tMM)$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$.
   On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. On suppose A inversible.
   Montrer que $\text{rg}(M) \geqslant r$, et établir l'équivalence : $\text{rg}(M) = r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.
3. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé de matrices de rang inférieur ou égal à r, et contenant la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\dim(\mathcal{V}) \leqslant nr$.

Exercice 21. Centrale PSI 2017

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u \circ v - v \circ u = \lambda v$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u \circ v^n - v^n \circ u = \lambda n v^n$.
2. Montrer que v est nilpotent.

Exercice 22. Centrale PSI 2017-Python

Soit $P \in \mathbb{C}_p[X], Q \in \mathbb{C}_q[X]$ et u définie sur $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ par $u(A,B) = AP + BQ$.
Soit $\mathcal{B} = \big((1,0),(X,0),\cdots,(X^{q-1},0),(0,1),(X,1),\cdots,(X^{q-1},1),\cdots(0,X^{p-1}),(X,X^{p-1}),\cdots,(X^{q-1},X^{p-1})\big)$ une base de $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$

1. Donner la matrice $M_{P,Q}$ de u dans $\mathcal{B}$ en fonction des coefficients de P et Q.
2. Écrire un programme en python qui prend les listes associées aux coefficients de P et de Q en paramètre et donne la matrice $M_{P,Q}$.
3. On choisit $P(X) = X^4 + X^3 + 1$ et $Q(X) = X^3 - X + 1$. Montrer que :
   $\exists!(A_0, B_0) \in \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_3[X]$ tel que $A_0P + B_0Q = 1$.
4. On choisit $P(X) = (X-1)(X-2)(X+2)$ et $Q_a(X) = X(X-1)(X-a)$.
   Tracer sur $\big[-2,1;2,1\big]$ la courbe de la fonction $d : t \mapsto \det(M_{P,Q_t})$.

Exercice 23. Centrale PSI 2017

1. Soit P et Q deux polynômes dans $\mathbb{C}_n[X]$ admettant une racine commune λ. Montrer qu'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ non nuls tels que $UP + VQ = 0$.
2. On choisit $n = 2$ et deux polynômes P et Q de $\mathbb{C}_2[X]$ et on pose $\varphi(U,V) = UP + VQ$. Montrer que φ est linéaire de $(\mathbb{C}_1[X])^2$ dans $\mathbb{C}_3[X]$ et exprimer sa matrice dans des bases à déterminer.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de P et Q pour qu'ils n'aient aucune racine commune.

Exercice 24. CCP 2017 Peyrard

Soit A et B des matrices de taille $n \times n$ telles qu'il existe un polynôme P de degré supérieur ou égal à 1 vérifiant : $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que A et B commutent.

*corrigé

Exercice 25. CCP PSI 2017

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(f) = 0$, avec $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Démontrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ lorsque E est de dimension finie, puis dans le cas général. *corrigé

Exercice 26. Mines-Telecom 2017 Peltier

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f_1, f_2, f_3 trois endomorphismes de E tels que :

$f_1^3 = f_2^3 = f_3^3 = 0$ et $\forall (i,j) \in [[1;3]]^2, f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$.
Montrer que $f_1 \circ f_2 \circ f_3 = 0$. *corrigé

Exercice 27. Mines-Telecom PSI 2017

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit X une matrice telle que $X^2 = A$. Montrer que X et A commutent, puis que X est triangulaire supérieure.
2. Trouver toutes les matrices X telles que $X^2 = A$.

*corrigé

Exercice 28. ENSAM Math 2017 Medico

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{4}(I_3 + J)$.

1. Calculer J^n et A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. Trouver les suites (x_n), (y_n), (z_n) telles que :
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

*corrigé

Exercice 29. *Mines-Ponts PSI 2017

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Peut-on toujours trouver des sous-espaces de E stables par u de n'importe quelle dimension $k \leqslant n$?
Qu'en est-il lorsque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire ?

Exercice 30. Mines-Ponts PSI 2017

Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\left\{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ B^2 = A\right\}$ soit fini et non vide.
Que dire du cardinal de cet ensemble ?

Exercice 31. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $A = (j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $B = (i-1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $C = A + nB$. Déterminer le rang de C. La matrice C est-elle diagonalisable ?

Exercice 32. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $E_A = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AMA = 0\right\}$.

1. On suppose que A est diagonalisable de rang r. Déterminer $\dim(E_A)$.
2. On suppose à présent que A est quelconque. Déterminer $\dim(E_A)$.

Exercice 33. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ et $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $P^{-1}MP = R_k$.
3. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $Q^{-1}MQ = R_k$.

Exercice 34. Mines-Ponts PSI 2017
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable et $B = A^3 + A + I_n$.
Montrer que A est un polynôme en B. Qu'en est-il si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 35. Mines-Ponts PSI 2017
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.
Montrer que u n'est pas diagonalisable si et seulement s'il existe un plan P de E stable par u et une base de P dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit par u sur P est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Exercice 36. Mines-Ponts PSI 2017

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n, u et v des endomorphismes de E. On suppose que u a n valeurs propres distinctes. Que peut-on dire de v si $u \circ v = v \circ u$?
2. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et E_1 le sous espace vectoriel de E engendré par les fonctions cosinus et sinus.
   (a) Soit $d_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ l'endomorphisme qui à une fonction $y \in E_1$ associe sa dérivée.
   Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E_1)$ tel que $f \circ f = d_1$.
   (b) Soit $d_2 \in \mathcal{L}(E_1)$ l'endomorphisme qui échange les fonctions cosinus et sinus.
   Quelle est la nature géométrique de d_2 ? Peut-on trouver $g \in \mathcal{L}(E_1)$ tel que $g \circ g = d_2$?

Exercice 37. Mines-Ponts PSI 2017
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que f^2 est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

Exercice 38. Mines-Ponts PSI 2017

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ O_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
2. Soit A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.
   (a) Montrer que pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AD - DB = C$.
   (b) Soit $N = \begin{pmatrix} A & C \\ O_n & B \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & B \end{pmatrix}$. Montrer que N et M sont semblables. Sont-elles diagonalisables ?

Exercice 39. Mines-Ponts PSI 2017
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Sp}(u) = \varnothing$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $\mathrm{Ker}(P(u)) \neq \{0\}$.
2. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 stable par u.
   En déduire que tout endomorphisme de E possède un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Exercice 40. *Mines-Ponts PSI 2017
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ soit diagonalisable et $P'(A)$ inversible. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 41. Mines-Ponts PSI 2017
Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ O_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est et que $B = O_n$.

Exercice 42. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer l'exponentielle de $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Commenter le résultat.

Exercice 43. Mines-Ponts PSI 2017

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ayant une limite finie en $+\infty$.
On définit l'endomorphisme T de E par : $\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = f(x+1)$.
Trouver les éléments propres de T.

Exercice 44. Mines-Ponts PSI 2017

Déterminer les classes de similitude de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *corrigé

Exercice 45. Mines-Ponts PSI 2017

Soit A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A et B n'ont aucune valeur propre commune, l'équation $AX - BX = C$ admet une unique solution.
2. La réciproque est-elle vraie ? Si oui, le démontrer.

Exercice 46. Mines-Ponts PSI 2017

1. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$, alors A est un polynôme en B ou B est un polynôme en A.
2. Qu'en est-il si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 3$?
3. Qu'en est-il si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 47. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $AB = BA$ et toutes les valeurs propres de A sont simples.

1. Montrer que : $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et deux matrices diagonales D et D' telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$.
2. On note $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ et $D' = \mathrm{Diag}(d'_1, d'_2, \cdots, d'_n)$, et $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X],\ f(P) = (P(d_1), P(d_2), \cdots, P(d_n))$.
   Montrer que f est un isomorphisme.
3. Montrer qu'il existe un polynôme L tel que $\forall i \in [[1;n]],\ L(d_i) = d'_i$.
4. Montrer que : $\exists (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $B = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$.
   Que peut-on en déduire sur le commutant de A ?
5. Cela reste-t-il vrai si les valeurs propres de A ne sont pas toutes simples ?

Exercice 48. Mines-Ponts PSI 2017

Déterminer les éléments propres de la matrice $\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_3x_n & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_{n-1}x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 49. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Que vérifient les valeurs propres de A ?

3. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{N}$.
4. Pour tout entier naturel k, calculer A^k en fonctions de A et de I_n (on pourra utiliser une division euclidienne).

Exercice 50. Centrale PSI 2017

1. Soit n nombres complexes $r_1, r_2, \cdots, r_n$ deux à deux distincts. On pose, pour $k \in [[1;n]]$: $L_k = \prod_{i \in [[1;n]] \setminus \{k\}} \frac{X - r_i}{r_k - r_i}$.
   Montrer que $L_1, L_2, \cdots, L_n$ est une base de $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
   Expliciter la décomposition d'un polynôme $P \in E$ quelconque dans cette base.
2. Soit $A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. On définit ϕ_A l'application qui à $P \in E$ associe le reste dans la division euclidienne de XP par A.
   Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de E. Déterminer sa matrice dans la base canonique de E.
3. On suppose que A est à racines simples.
   Montrer que ϕ_A est diagonalisable. Expliciter une base de vecteurs propres.

Exercice 51. Centrale PSI 2017

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsque tous les $a_{i,j}$ sont positifs, et que la somme des éléments de chaque ligne vaut 1.

1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit.
2. Montrer que 1 est valeur propre de toute matrice stochastique.
3. Montrer que les valeurs propres des matrices stochastiques sont toutes de module majoré par 1.
4. Expliciter une matrice stochastique ayant 4 valeurs propres distinctes de module 1.
5. On suppose A stochastique à coefficients strictement positifs. Montrer que 1 est la seule valeur propre de A de module 1, et que le sous-espace propre associé est de dimension 1.

*corrigé

Exercice 52. Centrale PSI 2017-Python

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$.
On dit que v est un vecteur de Krylov pour u si la famille $\left(v, u(v), u^2(v), \cdots, u^{n-1}(v)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

1. (a) Écrire une fonction prenant en argument une liste de n vecteurs et vérifiant si cette famille est une base de $\mathbb{R}^n$ ou non.
   (b) Écrire une fonction `estKrylov(M,v)` d'arguments une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur v de $\mathbb{R}^n$, indiquant si v est un vecteur de Krylov associé à M.
2. Soit v un vecteur de Krylov associé à u.
   Donner la forme de la matrice de u dans la base $\left(v, u(v), u^2(v), \cdots, u^{n-1}(v)\right)$.
3. Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$ un polynôme non nul annulateur de u.
   Montrer que la famille $\left(v, u(v), u^2(v), \cdots, u^d(v)\right)$ est liée.
4. En déduire que si u est diagonalisable et possède une valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à 2, alors il n'existe pas de vecteur de Krylov pour u.

Exercice 53. Centrale PSI 2017

Soit $f_n = \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f_n(P) = \sum_{k=0}^{n} X^k \int_0^1 P(t) t^k \, \mathrm{d}\, t$.

1. Montrer que f_n est un automorphisme.
2. On note M_n la matrice de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M_n est diagonalisable.

3. Soit $Y = {}^t(y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tYM_nY = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} y_k t^k\right)^2 \mathrm{d}\,t$.
4. Montrer que $\mathrm{Sp}(f_n) \subset \mathbb{R}_+^*$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \min(\mathrm{Sp}(f_n))$. Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

Exercice 54. Centrale PSI 2017-Python

Un plateau de jeu de type monopoly comporte un circuit de 12 cases numérotées de 0 à 11. Le joueur commence sur la case 0.
On note Y_n la variable aléatoire égale au numéro sur lequel se trouve le joueur après le n-ième lancer d'un dé classique équilibré à six faces. On suppose que les lancers sont mutuellement indépendants.

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n(\Omega) \subset [[0;11]]$, et donner la loi de Y_0.
2. Écrire une fonction de paramètre n et évaluant Y_n pour une réalisation aléatoire du jeu.
3. Afficher les fréquences, sur la réalisation aléatoire de 5000 parties du jeu, de l'événement $(Y_n(\omega) = k)$ pour $n \in \{50, 100, 200, 500\}$.
4. Exprimer $\mathbf{P}(Y_{n+1} = k)$ en fonction des $(\mathbf{P}(Y_n = i))_{0 \leqslant i \leqslant 11}$.
5. Soit $U_n = {}^t(\mathbf{P}(Y_n = 0), \mathbf{P}(Y_n = 1), \cdots, \mathbf{P}(Y_n = 11)) \in \mathcal{M}_{12,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe une matrice P telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = PU_n$.
6. Exprimer U_n en fonction de U_0. P est-elle diagonalisable ?

Exercice 55. Centrale PSI 2017

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Donner une relation entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.
   Qu'est-ce qu'un polynôme caractéristique ?
   Donner le théorème de Cayley-Hamilton.
2. On notera P le polynôme caractéristique de u. Montrer que si $P'(0) \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\left(u^2\right)$.
3. Pour $n = 3$, montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\left(u^2\right)$ si et seulement si 0 est valeur propre de même multiplicité pour u et pour u^2.

Exercice 56. Centrale PSI 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telles que $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de z, BA est-elle inversible ?
2. BA est-elle diagonalisable ? AB est-elle diagonalisable ?
3. $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(B)$ sont-ils supplémentaires ?
4. Montrer qu'il existe une infinité de couples (A, B) vérifiant tous ces critères.

Exercice 57. CCP 2017 Louvet

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases} M^3 - 4M &= 0 \\ \mathrm{tr}(M) &= 0 \end{cases}$

1. Montrer que les valeurs propres de M sont racines du polynôme $P = X^3 - 4X$
2. Caractériser les matrices M.

*corrigé

Exercice 58. CCP 2017 Medico

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Diagonaliser K.
2. Donner une expression de M en fonction de K.
3. Diagonaliser M et donner M^n.

*corrigé

Exercice 59. CCP 2017 Cholin

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel . Soit $\varphi : \begin{array}{ll} \mathcal{L}(E) & \to \mathcal{L}(E) \\ u & \mapsto u + \mathrm{tr}(u)\mathrm{Id}_E \end{array}$.

Est-ce que φ est diagonalisable? *corrigé

Exercice 60. CCP 2017 Viceriat

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et φ défini par $\varphi(M) = M + \mathrm{tr}(M)I_n$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Donner $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{rg}(\varphi)$.
3. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de φ.
4. φ est-il diagonalisable?
5. φ est-il bijectif? Si oui, donner φ^{-1}.

*corrigé

Exercice 61. CCP PSI 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \backslash \{O_n\}$ telle que $A^3 + 9A = O_n$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer les valeurs propres possibles.
2. Montrer que, si n est impair, A n'est pas inversible.
3. Montrer que A ne peut pas être symétrique.

*corrigé

Exercice 62. CCP PSI 2017

Soit $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, avec $a_2 \neq 0$. On définit $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1. On note $\chi_n = \det(XI_n - A_n)$. Calculer χ_2 et χ_3.
2. Montrer que χ_n est divisible par X^{n-2}.
3. Montrer que $\chi_n = X^{n-2}\left(X^2 - a_1 X - B\right)$, avec $B = \sum_{k=2}^{n} a_k^2$.
4. On suppose que $B = 0$. La matrice A_n est-elle diagonalisable?
5. On suppose $B \neq 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A_n soit diagonalisable.

*corrigé

Exercice 63. CCP PSI 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. On définit $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(AM) I_n$.

1. Calculer φ^2 en fonction de φ.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi : M$ soit diagonalisable. Déterminer alors les sous-espaces propres.

*corrigé

Exercice 64. CCP PSI 2017

Soit deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geqslant 2$, qui ont le même spectre.

1. Montrer que si $\operatorname{card}(\operatorname{Sp}(A)) = n$, alors A et B sont semblables.
2. Donner deux matrices possédant les mêmes valeurs propres dans $\mathbb{C}$, mais qui ne sont pas semblables.

*corrigé

Exercice 65. CCP PSI 2017

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_2[X]$ annulateur de A.
2. Trouver un polynôme annulateur de A et en déduire A^{-1}.
3. Quels sont les polynômes annulateurs de A?

*corrigé

Exercice 66. CCP PSI 2017

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit $f : M \mapsto 2\operatorname{tr}(M) A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. f est-il diagonalisable?

*corrigé

Exercice 67. ENSAM Math 2017 Vicériat

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = -u$.

1. Montrer que si E est de dimension impaire, alors un endomorphisme quelconque de E admet au moins une valeur propre réelle.
   Qu'en est-il en dimension paire?
2. Dans cette question on suppose que E est de dimension 3. Montrer que 0 est valeur propre de u et donner sa multiplicité.
3. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.
4. ...

*corrigé

Exercice 68. ENSAM Math 2017 Louvet

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{p_x}(x) = x$.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que $\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall e \in \mathcal{B}, f^p(e) = e$.
   En déduire que : $\exists p \in \mathbb{N}^*, \quad f^p = \mathrm{Id}_E$.
2. On suppose f diagonalisable. Montrer que $f^2 = \mathrm{Id}_E$

*corrigé

Exercice 69. ENSAM PSI 2017

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est à diagonale strictement dominante si : $\forall i \in [[1;n]]$, $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{i,j}|$.

1. Montrer qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible. La réciproque est-elle vraie ?
2. Pour $i \in [[1;n]]$, on note $D_i(A)$ le disque de $\mathbb{C}$ défini par la condition $|z - a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{i,j}|$.

   Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset D_1(A) \cup D_2(A) \cup \cdot \cup D_n(A)$.

*corrigé

Exercice 70. ENSAM PSI 2017

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, (E) l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$.
Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $h(P) = P'' - P' - 2P$.

1. Donner une base de l'espace S des solutions de (E).
2. Montrer que l'endomorphisme h est bijectif. Est-il diagonalisable ?
3. Montrer que $A = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ h(P) \in \mathrm{Vect}\left(X^{n-1}, X^n\right)\right\}$ est un supplémentaire de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $f \in S$. Montrer que la partie régulière T du développement limité à l'ordre n de f en 0 est un élément de A.

*corrigé

Exercice 71. ENSAM PSI 2017

Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de même paramètre $\frac{1}{2}$. Soit T la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel que $X_n = X_{n+1} = 1$. On note :
A_n : "Pour tout $k \in [[1;n]]$, les valeurs de X_{k-1} et de X_k ne sont pas toutes deux égales à 1 et $X_n = 0$"
B_n : "Pour tout $k \in [[1;n]]$, les valeurs de X_{k-1} et de X_k ne sont pas toutes deux égales à 1 et $X_n = 1$"
On note $p_n = \mathbf{P}(A_n)$ et $q_n = \mathbf{P}(B_n)$.

1. Calculer $\mathbf{P}(T = 0)$, $\mathbf{P}(T = 1)$, $\mathbf{P}(T = 2)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(T = n) = \frac{F_{n+1}}{2^{n+2}}$ où $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

*corrigé

Exercice 72. ENSAM PSI 2017

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que A est trigonalisable mais pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La trigonaliser.
2. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $\mathrm{Sp}(M) \subset \left\{-1;0;1\right\}$.
3. Estimer la dimension des sous-espaces propres correspondants.
4. Montrer que 0 est valeur propre de M.
5. Trouver toutes les matrices de M solution de $M^2 = A$.

*corrigé

Exercice 73. TPE 2017 Yvernat

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^4.
2. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{array}$.
   φ est-il diagonalisable ?

*corrigé

Exercice 74. TPE 2017 Mazeran

Soit A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\begin{cases} C &= A+B \\ C^2 &= 2A+3B \\ C^3 &= 5A+6B \end{cases}$.

1. A et B sont-elles diagonalisables ?
2. Que peut-on dire du spectre de A, B et de C ?

*corrigé

Exercice 75. TPE 2017 Paillard

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f) = 1$.

1. Montrer que $f^2 = \text{tr}(f) f$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

*corrigé

Exercice 76. TPE PSI 2017

Soient $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulles. On pose $M = I_n + CL$.

1. Établir : $M^2 = (2+LC)M - (1+LC)I_n$.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?

*corrigé

Exercice 77. TPE PSI 2017

Soit n un entier supérieur ou égal à 4. On définit $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto XP'' + (X-4)P' - 3P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Est-il diagonalisable ?
3. Déterminer la dimension puis une base du noyau de φ.

*corrigé

Exercice 78. TPE PSI 2017

Soit $n \geqslant 3$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{rg}(A) = 2$, $\text{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0$.

1. Combien de valeurs propres A possède-t-elle ?
2. Montrer que A est diagonalisable.

*corrigé

Exercice 79. TPE PSI 2017
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par f. *corrigé

Exercice 80. TPE PSI 2017
Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$
Montrer que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de projecteur. *corrigé

Exercice 81. Mines-Telecom 2017 Louvet
Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabiilté de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *corrigé

Exercice 82. Mines-Telecom 2017 Fadel
Soit $a \in \mathbb{R}$, et $A = \begin{pmatrix} a & a & a & 3a \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $-2 \in \mathrm{Sp}(A)$.
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

*corrigé

Exercice 83. Mines-Telecom 2017 Viceriat
Soit $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}\,t \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $\varphi : \begin{array}{ll} \mathbb{R}_n[X] & \to \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto A\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}\,t - P\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}\,t \end{array}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Donner les valeurs propres de φ.
   φ est-il diagonalisable ?

*corrigé

Exercice 84. Mines Telecom PSI 2017
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^2 = 0$.

1. Calculer les dimensions de $\mathrm{Im}(M)$ et de $\mathrm{Ker}(M)$.
2. Montrer que M est semblable à la matrice élémentaire $E_{1,3}$.

*corrigé

Exercice 85. Mines-Ponts PSI 2017
Soient E un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux de E, soit $u = p + q$.

1. Caractériser un projecteur orthogonal, et donner un exemple de problème faisant intervenir ces projecteurs orthogonaux.
2. Prouver que le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Prouver que les valeurs propres de u appartiennent à l'intervalle $[0;2]$.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 86. Mines-Ponts PSI 2017

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E.
Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux si et seulement si $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = d(x,F)^2 + d(x,G)^2$.

Exercice 87. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t$. Soit $A \in E,\ A \neq 0$.
Soit f_A l'application de E dans E définie par : $f_A(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par A.

1. Montrer que f_A est un endomorphisme de E.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f_A soit un projecteur orthogonal.

Exercice 88. CCP 2017 Beraud et Yvernat

Soit φ telle que
$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2, \quad \varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Trouver une base orthonormale $\mathcal{E}$ de F.
4. Déterminer $F^\perp$.
5. Calculer le projeté orthogonal sur F de
   $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

*corrigé

Exercice 89. CCP 2017 Fleury

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\langle A,B\rangle \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{Tr}(A^TB)$.

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétrique $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices antisymétrique $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe et orthogonaux
2. Déterminer la distance de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Appliquer ce résultat à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$

*corrigé

Exercice 90. CCP PSI 2017

1. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $E = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa dimension
3. Calculer $d(1,E)$ pour la distance associée au produit scalaire défini dans la question 1.

*corrigé

Exercice 91. ENSAM PSI 2017

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\left\{0\right\},\ {}^tXMX > 0$.

1. Montrer l'implication : M vérifie $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$
2. Montrer que si M vérifie $\mathcal{P}$ alors M est inversible et M^{-1} vérifie aussi $\mathcal{P}$.
3. Montrer que si A et B vérifient $\mathcal{P}$, alors $A+B$ vérifie $\mathcal{P}$.

*corrigé

Exercice 92. Navale PSI 2017
Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E tel que $\langle u(x)|x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$.
Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$. *corrigé

Exercice 93. TPE PSI 2017
Soit E un espace préhilbertien réel.
On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge faiblement vers x si : $\forall y \in E, \lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n - x|y\rangle = 0$.

1. On suppose que E est de dimension finie.
   Montrer que (x_n) converge faiblement vers x si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$.
2. Montrer que cette équivalence est fausse en dimension infinie.

*corrigé

Exercice 94. Mines-Ponts PSI 2017
Déterminer $\left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX = 0\right\}$.

Exercice 95. Mines-Ponts PSI 2017
Trouver toutes les matrices réelles nilpotentes antisymétriques.

Exercice 96. Mines-Ponts PSI 2017
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A^2$.

1. Diagonaliser ${}^tAA$. *Ind.* Chercher un polynôme annulateur de ${}^tAA$.
2. Montrer que A est orthogonalement semblable à l'une des matrices suivantes :
   $O_2, I_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 97. Mines-Ponts PSI 2017
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est définie positive si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que A est définie positive si et seulement si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\left\{O_{n,1}\right\}, {}^tXAX > 0$.
2. On suppose que A est définie positive. Montrer que A^{-1} l'est aussi et que tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie : $\|X\|^4 \leqslant ({}^tXAX)\left({}^tXA^{-1}X\right)$.

Exercice 98. Mines-Ponts PSI 2017
On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de l'espace euclidien E.
Pour tout $f \in O(E)$, on note $I(f) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $K(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.
$\forall u \in E\backslash\left\{0_E\right\}$, on note s_u la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

1. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par $f \in O(E)$ si et seulement si $F^\perp$ de E est stable par f
2. Montrer que, si $f \in O(E)$, $E = I(f) \overset{\perp}{\oplus} K(f)$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
   Montrer que $I\left(s_{u_1} \circ s_{u_2} \circ \cdots \circ s_{u_p}\right) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p)$.

*corrigé

Exercice 99. Mines-Ponts PSI 2017

Dans l'espace euclidien E, on note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques à valeurs propres positives. Soit $f \in S^+(E)$

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que : $\exists h \in S^+(E),\ h^2 = f$.
3. Montrer que si $g \in S^+(E)$, alors $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$

Exercice 100. Centrale PSI 2017

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui vérifie la relation (E) : $A^2 = A^T$.

1. Dans cette question seulement, on suppose que $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
   À quelle condition sur a et b la matrice A vérifie-t-elle (E) ? Donner les couples solutions.
2. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 4.
3. Montrer que A^3 est la matrice d'un projecteur et qu'elle est symétrique.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^3)$ et que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^3)$.
5. Soit F un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On dit que F est stable par A si : $\forall X \in F,\ AX \in F$.
   Montrer que si F est stable par A, alors $F^\perp$ aussi.
6. Soit $Y \in \mathrm{Im}(A)$. On note $F_Y = \mathrm{Vect}\left(Y, AY, A^2Y\right)$.
   Montrer que l'application $X \mapsto AX$ induit une isométrie sur F_Y.
7. Reconnaître cette isométrie.

Exercice 101. Centrale PSI 2017

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots e_n)$.
Soit p un projecteur de E de rang 1.

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement s'il est symétrique.
2. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \|p(e_k)\|^2$.
3. On note A la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. Soit p^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est ${}^tA$.
   (a) Montrer que $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p^*(y)\rangle$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(p^* \circ p) = \mathrm{Ker}(p)$.
   (c) On suppose que $\sum_{k=1}^{n} \|p(e_k)\|^2 = 1$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 102. Centrale PSI 2017

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots e_n)$. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $G = {}^tAA$ avec $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée de x_j dans $\mathcal{B}$.

1. Exprimer G à l'aide du produit scalaire de E.
2. Montrer que G est diagonalisable à valeurs propres positives.
   Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ses valeurs propres soient strictement positives.
3. Montrer qu'il existe $(y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}) \in E^{n+1}$ tel que $\forall i \neq j,\ \|y_i - y_j\| = 1$.

Exercice 103. Centrale PSI 2017

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On note U l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres et $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.
On pose $V_0 = \{0\}$ et pour $k \in [[1;n]]$, $V_k = \text{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$. Soit enfin $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \langle Ax, x\rangle$.

1. Montrer que, pour tout $k \in [[1;n]]$, $\lambda_k = \max\limits_{x \in V_k \cap U} \varphi(x) = \min\limits_{x \in V_{k-1}^{\perp} \cap U} \varphi(x)$.
2. Montrer que les coefficients diagonaux de A sont compris entre λ_1 et λ_n.
3. Soit $k \in [[1;n]]$. On note $\mathcal{W}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.
   Montrer que $\lambda_k = \min\limits_{W \in \mathcal{W}_k} \left(\max\limits_{x \in W \cap U} \varphi(x) \right)$.

Exercice 104. CCP PSI 2017

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^t M M = I_n$.

1. Montrer que M est symétrique.
2. Déterminer toutes les matrices M solutions.

*corrigé

Exercice 105. CCP PSI 2017

1. Calculer $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$ et $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$ pour $\theta \notin \{p\pi, p \in \mathbb{Z}\}$.
2. On note r une rotation d'angle θ dans un espace euclidien de dimension 2 ou 3 ; calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} r^k(x)$.
3. Soit u est une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$
   (a) Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$ sont supplémentaires et orthogonaux.
   (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u^k(x)$.

*corrigé

Exercice 106. CCP PSI 2017

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + {}^tM = I_n$.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de M, alors toute valeur propre de M est racine de P.
2. On suppose dans cette question que M est symétrique.
   (a) Montrer, sans utiliser le théorème spectral, que M est diagonalisable.
   (b) Montrer que $\text{tr}(M)\det(M) \neq 0$.
3. Montrer que M est diagonalisable.
4. Montrer que M est symétrique si et seulement si 1 n'en est pas valeur propre.

*corrigé

Exercice 107. CCP PSI 2017

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \backslash \{O_n\}$ telle que $A^3 + 9A = O_n$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer les valeurs propres possibles.
2. Montrer que, si n est impair, A n'est pas inversible.
3. Montrer que A ne peut pas être symétrique.

*corrigé

Exercice 108. CCP PSI 2017

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + 4I_2 = O_2$ et telle que ${}^tMM = M{}^tM$. On pose $S = {}^tMM$

1. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de S.
2. En déduire que $\frac{1}{2}M$ est orhogonale.
3. Déterminer toutes les matrices réelles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2+4I_2=O_2$ et telle que ${}^tMM=M{}^tM$.

*corrigé

Exercice 109. CCP PSI 2017

Écrire la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x-2y+z=0$ dans la base orthonormale canonique de $\mathbb{R}^3$. *corrigé

Exercice 110. ENSAM PSI 2017 - Python

1. Écrire une fonction **sym** prenant en argument $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qui renvoie **True** si M est symétrique et **False** sinon.
2. Écrire une fonction **decomp** prenant en argument M et qui renvoie l'unique couple $(A,S)\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $M=A+S$.
3. Écrire une fonction **ortho** prenant en argument $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qui renvoie **True** si M est orthogonale et **False** sinon.

Exercice 111. ENSAM PSI 2017

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\},\ {}^tXMX>0$.

1. Montrer l'implication : M vérifie $\mathcal{P}\Longrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)\subset\mathbb{R}_+^*$
2. Montrer que si M vérifie $\mathcal{P}$ alors M est inversible et M^{-1} vérifie aussi $\mathcal{P}$.
3. Montrer que si A et B vérifient $\mathcal{P}$, alors $A+B$ vérifie $\mathcal{P}$.

*corrigé

Exercice 112. Mines Telecom PSI 2017

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u un vecteur de E.
Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u)$ et s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

1. Expliciter $p(x)$ et $s(x)$ pour tout vecteur x de E
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et deux vecteurs a et b de E distincts et de même norme.
   Montrer qu'il existe un unique sous-espace vectoriel F de dimension 1 de E tel que la symétrie orthogonale s par rapport à $F^\perp$ vérifie :
   $s(a)=b$ et $s(b)=a$.

*corrigé

Exercice 113. TPE 2017 Paillard

1. Soit P un polynôme unitaire de degré 3 et $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ (a,b,c non nécessairement distinctes). Montrer l'équivalence :
   a, b et c sont les racines de P (les valeurs des racines apparaissant autant de fois que leur multiplicité) si et seulement si $P(X)=X^3-X^2(a+b+c)+X(ab+bc+ac)-abc$.
2. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ deux à deux distinctes et $M=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$.
   Montrer que M est une matrice de rotation si et seulement si a,b,c sont les trois racines de $X^3-X^2+\alpha$ avec $\alpha\in\left]0;\frac{4}{27}\right[$.

*corrigé

Exercice 114. TPE PSI 2017
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Déterminer tous les endomorphismes u de E tels que : $\forall (x,y) \in E^2,\ u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$. *corrigé

Exercice 115. ICNA PSI 2017
Déterminer $E = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}),\ A \text{ est orthogonale}\right\}$. *corrigé

2 Analyse

Exercice 116. Mines-Ponts PSI 2017
Étudier $f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\right)$.

Exercice 117. Mines-Ponts PSI 2017
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{f(x)}{2}$.

Exercice 118. Mines-Ponts PSI 2017
Calculer une primitive de $x \mapsto \sqrt{2+\tan^2(x)}$.

Exercice 119. Mines-Ponts PSI 2017
Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{(\mathrm{sh}(x))^2}{(\mathrm{ch}(x))^3}\,\mathrm{d}x$. *corrigé

Exercice 120. ENSAM PSI 2017
On veut montrer que π est irrationnel. On suppose par l'absurde que $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{R}$, $q^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$.
2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(X) = \dfrac{1}{n!}X^n(bX-a)^n$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} Q_n(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.
3. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $Q_n' = (2bX-a)Q_{n-1}$. Puis, à l'aide de cette relation et de la formule de Leibniz, exprimer les dérivées successives de Q_n en fonction de celles que Q_{n-1}.
4. Montrer que $Q_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $Q_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{N}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \in \mathbb{Z}$ et conclure.

*corrigé

Exercice 121. Navale PSI 2017
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est contractante (c'est-à-dire a-lipschitzienne avec $a \in [0;1[$). Montrer que f admet un unique point fixe. Que dire pour $a = 1$? *corrigé

Exercice 122. St Cyr PSI 2017

1. Trouver un exemple de fonction continue mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Trouver un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ mais pas $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[0;1]$.

*corrigé

Exercice 123. ICNA PSI 2017

Soit f une fonction continue et bijective de $\left[0;1\right]$ dans lui même, telle que :
f^{-1} soit continue et $\forall x \in \left[0;1\right],\ f(2x - f(x)) = x$.

1. Calculer $f(0$ et $f(1)$. f est-elle croissante ou décroissante ?
2. On suppose qu'il existe un réel x_0 dans $\left[0;1\right]$ tel que $f(x_0) \neq x_0$, et on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = f(x_{n-1})$.
   Pour tout entier naturel n, calculer $x_n - x_0$ et en déduire f.

*corrigé

Exercice 124. Mines-Ponts PSI 2017

Calculer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de $b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$.

Exercice 125. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P(X) = 1 + 2X + 3X^2 + \cdots + (n-1)X^{n-2} + nX^{n-1} + (n-1)X^n + \cdots + 2X^{2n-3} + X^{2n-2}$.
Trouver les racines de P et le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 126. Mines-Ponts PSI 2017

1. Montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n tel que $P_n\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P_n}$.

Exercice 127. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n}{3k}$.

Exercice 128. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$.

Exercice 129. TPE PSI 2017

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2} \mathrm{e}^{-\frac{n}{k}}$. *corrigé

Exercice 130. St Cyr PSI 2017

Soit $P = X^3 + X + 1$. On note α, β, γ les racines complexes de P.

1. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
2. En exploitant la division euclidienne du polynôme $Q = X^4$ par P, calculer $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.

*corrigé

Exercice 131. Mines-Ponts PSI 2017

Soit (a_n) une suite telle que $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \left[0;1\right]$.
2. Calculer la limite de la suite (a_n).

Exercice 132. Mines-Ponts PSI 2017

Donner la nature de la série de terme général $u_n = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 133. Mines-Ponts PSI 2017

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+(-1)^n}$

Exercice 134. Mines-Ponts PSI 2017

Montrer qu'il existe une constante $C \neq 0$ telle que : $\displaystyle\prod_{2\leqslant k\leqslant n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{n}}$.

Exercice 135. Mines-Ponts PSI 2017

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}\,t = f(n) + \int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}\,t$.
2. On suppose que f' est intégrable sur $\left[1;+\infty\right[$.
   Montrer que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. Application : trouver la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Exercice 136. Mines-Ponts PSI 2017

Soit f une fonction continue et positive sur $\left[a;b\right]$.

Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b (f(t))^n\,\mathrm{d}\,t\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 137. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^a}\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$.

Exercice 138. Centrale PSI 2017-Python

1. On définit la suite (F_n) par : $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Écrire un programme qui renvoie une liste contenant les 20 premiers termes de la suite (F_n).
2. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\alpha_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$, $\beta_n = \dfrac{F_n}{F_{n+3}}$ et $S(n,p) = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\alpha_n^{2k+1}+\beta_n^{2k+1}\right)$. Écrire un programme donnant les valeurs de $S(n,p)$ pour $0 \leqslant n, p \leqslant 9$ avec un arrondi convenable. Que peut-on conjecturer ?
3. Calculer $(F_{n+2}+iF_{n+1})(F_{n+3}+iF_n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 8$. Que remarque-t-on ?
4. En utilisant les propriétés des nombres complexes, démontrer la conjecture de la question 2.

Exercice 139. Centrale PSI 2017

Soit (u_n) une suite réelle. On souhaite étudier la propriété (P) suivante : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \iff u_n + u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

1. Montrer que l'implication directe est toujours vraie.
2. On suppose que (u_n) est monotone. Montrer que la propriété (P) est alors vraie.
3. Si l'on retire cette hypothèse, le résultat est-il vrai ?

Exercice 140. Centrale PSI 2017-Python

Soit $f : x \mapsto x^5 - x^3 + 2x - 1$.

1. Montrer que f a un unique zéro x_0 dans l'intervalle $\left[0;1\right]$.
2. Trouver une valeur approchée de x_0 à 10^{-8} près. Combien d'itérations ont été nécessaires ?

3. On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. Écrire une fonction calculant les n premiers termes de cette suite. Trouver un entier n tel que $u_n \approx x_0$ à 10^{-8} près.
4. On considère maintenant une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ s'annulant en un point x_0. On suppose qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que g' ne s'annule pas sur $I = \left]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon\right[$. On pose $M = \sup\limits_{x \in I} |f''(x)|$ et $N = \inf\limits_{x \in I} |f'(x)|$.

   Soit (u_n) une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{g(u_n)}{g'(u_n)}$.

   (a) En supposant que $u_n \in I$, exprimer $g(x_0) - g(u_n) - g'(u_n)(x_0 - u_n)$ sous forme d'une intégrale et en déduire que $|u_{n+1} - x_0| \leqslant \dfrac{M|u_n - x_0|^2}{2N}$.

   (b) Montrer que si $|u_0 - x_0|$ est assez petit, la suite (u_n) tend vers x_0 et vérifie $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $|u_n - x_0| \leqslant \left(\dfrac{M}{2N}\right)^{2^n - 1} |u_0 - x_0|^{2^n}$.

Exercice 141. Centrale PSI 2017-Python

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $A_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ et $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(A_n)$ l'ensemble des parties de A_n. On appelle n-combinaison tout j-uplet $(p_1, p_2, \cdots, p_j)$ (avec $j \in [[1; n]]$), formé de parties non vides de A_n et formant une partition de A_n (c'est-à-dire $p_1 \cup p_2 \cup \cdots \cup p_j = A_n$ et les p_i sont deux à deux disjoints). On note a_n le nombre de n-combinaisons. On pose $a_0 = 0$.

Par exemple, on a $a_1 = 1$. Pour $n = 2$, les 2-combinaisons sont $(\{1\}, \{2\})$, $(\{2\}, \{1\})$ et $(\{1, 2\})$, donc $a_2 = 3$.

1. (a) Quel est le nombre de n-combinaisons dont tous les éléments sont de cardinal 1 ?

   (b) Déterminer a_3.
2. (a) Soit B une partie de A_n de cardinal $k \in [[1; n]]$.
   Quelle est la relation entre a_{n-k} et le nombre de n-combinaisons $(p_1, p_2, \cdots, p_j)$ telles que $p_1 = B$?

   (b) En déduire une relation entre a_n et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$.

   (c) Écrire un programme qui, pour $n \in \mathbb{N}$, renvoie a_n. Déterminer alors a_n pour $n \in [[1; 10]]$.
3. On pose $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$ et $c_n = (\ln(2))^{-n}$.

   (a) Montrer que $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_{n-k}}{k!}$.

   (b) Tracer sur Python les points $\left(n, \dfrac{c_n}{2}\right)$, (n, b_n) et (n, c_n). Que peut-on dire sur b_n ?

   (c) Démontrer cette conjecture.
   On pourra utiliser le résultat $\mathrm{e}^{\ln(2)} \leqslant 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(\ln(2))^k}{k!}\right) + 2\frac{(\ln(2))^n}{n!}$ après l'avoir démontré.

Exercice 142. Centrale PSI 2017

Nature de la série de terme général $u_n = \exp\left((-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}\right) - 1$?

Exercice 143. Centrale PSI 2017

Donner la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right) + (-1)^n}$

Exercice 144. Centrale PSI 2017

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel a_n tel que $\mathrm{e}^{a_n} + n a_n = 2$.
2. Déterminer la nature des séries de termes généraux a_n et $(-1)^n a_n$.

3. Déterminer la limite de $n(1-na_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 145. Centrale PSI 2017

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right)$

1. On choisit $\alpha = 2$. Étudier la convergence et donner la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Soit $\alpha \in [0;1]$.
   (a) Étudier la convergence et donner la limite éventuelle de la suite (a_n) définie par $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^2}$.
   (b) Étudier la convergence et donner la limite éventuelle de la suite (u_n).

Exercice 146. Centrale PSI 2017-Python

1. Calculer, en utilisant Python, les 50 premiers termes de la suite de terme général $u_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$.
2. Étudier la monotonie, la convergence et déterminer un équivalent de (u_n).
3. On note $e = (e_n)$ une suite de 0 ou de 1. Montrer la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} e_n u_n$.
   On notera $S(e)$ sa somme.
4. Montrer que S prend ses valeurs dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
5. Pour $e = (0,1,0,1,\cdots)$. Trouver à 10^{-5} près la valeur de $S(e)$.
6. Soit $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Montrer qu'il existe une suite e telle que $x = S(e)$.
7. Écrire, à l'aide de python, une fonction déterminant les n premiers termes de la suites e pour un x donné.

Exercice 147. Centrale PSI 2017

On donne $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ où a et b sont deux réels strictement positifs, et on pose $v_n = \ln\left(n^{b-a}u_n\right)$.

1. Montrer la convergence de $\sum(v_{n+1}-v_n)$.
2. En déduire une condition sur a et b pour que $\sum u_n$ converge.
3. Cette condition étant vérifiée, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour tout réel x tel que cette série converge.
   Donner l'ensemble de définition de f, et calculer $f(1)$.

Exercice 148. CCP PSI 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que la suite (U_n) est bien définie et tend vers 0.
2. Montrer que la série de terme général $V_n = \frac{(-1)^n}{n} U_n$ est convergente.
3. Soit $W_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de la série $\sum W_n$?

*corrigé

Exercice 149. CCP 2017 Peltier

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $\mathrm{e}^x = nx$ admet deux solutions x_n et y_n telles que $0 \leqslant x_n < y_n$.

2. Étudier la monotonie des suites (x_n) et (y_n).
3. En déduire qu'elles admettent une limite à déterminer.
4. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
5. Trouver un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n en $+\infty$.
6. Soit un nombre réel ε strictement positif. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leqslant (1+\varepsilon)\ln(n)$.

*corrigé

Exercice 150. CCP PSI 2017

1. Calculer $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta)$ pour $\theta \notin \{p\pi, p\in\mathbb{Z}\}$.
2. On note r une rotation d'angle θ dans un espace euclidien de dimension 2 ou 3 ; calculer $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^k(x)$.
3. Soit u est une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E de dimension $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires et orthogonaux.
   (b) Calculer $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k(x)$.

*corrigé

Exercice 151. CCP PSI 2017

Donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$. *corrigé

Exercice 152. CCP PSI 2017

Étudier en fonction du réel $\alpha>0$ la convergence de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$. *corrigé

Exercice 153. ENSAM PSI 2017

1. Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par une méthode dichotomique
   (on pourra utiliser l'équation $x^2-2=0$)
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right)$. Écrire une fonction qui calcule u_n.
3. On admet que $\left|u_n-\sqrt{2}\right| \leqslant \left(\dfrac{u_0-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2n}$.
   Écrire une nouvelle fonction donnant une valeur approchée de $\sqrt{2}$ et comparer les deux résultats obtenus.
4. Justifier que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 154. Mines Telecom PSI 2017

Montrer que les suites de terme général $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{k}\right)-\dfrac{1}{n}-\ln(n)$ et $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{k}\right)+\dfrac{1}{n}-\ln(n)$, définies pour $n\geqslant 2$ sont adjacentes.

En déduire que il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. *corrigé

Exercice 155. TPE 2017 Yvernat

Soit $r\in\mathbb{N}^*$.

1. Trouver $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{1}{n(n+r)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+r}$

2. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+r)}$ converge. Calculer sa somme.
3. Déterminer un équivalent du reste d'ordre n de cette série en $+\infty$.

*corrigé

Exercice 156. TPE PSI 2017

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que $u_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} 6(u_n - u_{n+1})$ et que $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 6\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^p.

*corrigé

Exercice 157. TPE PSI 2017

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Étudier la monotonie et la convergence de (u_n). *Ind.* Étudier la fonction $g = x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$.
3. Montrer que la série de terme général u_n converge.

*corrigé

Exercice 158. ENSEA 2017 Fadel

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $a_0 \geqslant a_1 > 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $\quad a_n = a_{n-1} + \frac{2}{n} a_{n-2}$

1. Est-ce que (a_n) converge ?
2. Montrer que $\left(\frac{a_n}{n^2}\right)$ converge
3. ...

*corrigé

Exercice 159. Mines-Ponts PSI 2017

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
   Montrer que F est un fermé de E.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   On note $\exp_p(A) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k$. Montrer que la suite $(\exp_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge. On notera $\exp(A)$ sa limite.
3. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.
4. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(A) = P(A)$?

Exercice 160. Mines-Ponts PSI 2017

1. Soit $(A, B) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))^2$.
   Existe-t-il toujours une fonction $\varphi : [0;1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue telle que $\varphi(0) = A$ et $\varphi(1) = B$?
2. Même question en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.
   Ind. On pourra considérer la fonction $\psi : \mathbb{C} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ définie par $\psi(z) : A + z(B - A)$.

Exercice 161. Mines-Ponts PSI 2017

1. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ et $A = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|$.
   Soit z une racine de P. Montrer que $|z| \leqslant \max\{1, A\}$.

2. Montrer que l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices trigonalisables.

Exercice 162. Centrale PSI 2017

Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0;1]), \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\right\}$. et $\forall f \in E,\ N(f) = \sup\limits_{[0;1]} \left\{|f'' + 2f' + f|\right\}$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Soit $f \in E$ et $h : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^t$. Montrer que : $\quad \forall t \in \left[0;1\right],\ h(t) = \displaystyle\int_0^1 (t-u)h''(u)\,\mathrm{d}\,u$.
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant aN(f)$.
4. Déterminer $\min\left\{a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant aN(f)\right\}$.

Exercice 163. Mines-Ponts PSI 2017

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}\,t}{\ln(t)}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que ce prolongement est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 164. Mines-Ponts PSI 2017

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, décroissant vers 0.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $N(x) = \mathrm{card}\left\{n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant x\right\}$.
Montrer que la fonction N est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si la série $\sum a_n$ converge, et que l'on a dans ce cas $\displaystyle\int_0^{+\infty} N(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 165. Mines-Ponts PSI 2017

Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}\,t$, de $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$?

Exercice 166. Mines-Ponts PSI 2017

Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.
Prouver l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}\,x$, et donner sa valeur.

Exercice 167. Mines-Ponts PSI 2017

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis exprimer sa dérivée.
2. Donner des équivalents de f au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Exercice 168. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ et $g(x) = f(x) + F(x)$.

1. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. À quelle condition F admet-elle une limite finie en $+\infty$?
2. On suppose que F admet une limite finie en $+\infty$. La fonction f admet-elle une limite finie en $+\infty$?
3. On suppose que g admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 169. Mines-Ponts PSI 2017

On admet : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$.

Exercice 170. Mines-Ponts PSI 2017

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(t))^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$.
2. Comparer $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(\ln(t))^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(t))^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 171. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x} \mathrm{e}^{i\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$ est-elle convergente ?
2. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n} \mathrm{e}^{i\ln(n)}$ est-elle convergente ?

Exercice 172. TPE 2017 Mazeran

Soit $a > 1$, f continue sur $[1,+\infty[$ et admettant une limite finie l en $+\infty$.

On s'intéresse à la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Montrer que, pour tout x dans $[1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^{x} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}\,t = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t} - \int_1^{a} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}\,t$.
2. En déduire la convergence de l'intégrale recherchée et expliciter sa valeur en fonction de $\displaystyle\int_1^{a} \frac{f(t)}{t} dt$.

*corrigé

Exercice 173. TPE PSI 2017

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\arctan(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}\,t$ est convergente.
2. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t\arctan(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}\,t$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ et déterminer F'.
3. Calculer la valeur de I.

*corrigé

Exercice 174. Mines-Telecom 2017 Peltier

Déterminer les fonctions continues sur $[0;1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que :

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3} + \int_0^1 \left(f\left(x^2\right)\right)^2 \mathrm{d}\,x$.

Indication : on pourra écrire $\dfrac{1}{3}$ sous forme d'intégrale. *corrigé

Exercice 175. Saint-Cyr Math/Info 2017 Medico

1. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}\,t$
2. Proposer une méthode informatique pour calculer une valeur approchée de cette intégrale.

*corrigé

Exercice 176. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $f \in \mathcal{C}^0\left([0;1],\mathbb{R}\right)$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}\,t = f(1)$.

Exercice 177. Centrale PSI 2017

On note G l'ensemble des fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}_+$ continues et croissantes. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G. On suppose que (g_n) converge simplement vers 0 sur $[0;1[$, et que $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers une limite non nulle a.

1. Donner un exemple d'une telle suite de fonctions.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;1]$, on note $G_n(x) = \int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, $\int_0^x G_n(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x = af(1)$.

Exercice 178. Centrale PSI 2017

1. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum\limits_{j=-n}^{n} \dfrac{1}{x+j}$.
   Montrer que la suite (S_n) converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. On note f la limite simple.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, on a $f(2x) = \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2}f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \pi\operatorname{cotan}(\pi x)$ est prolongeable par continuité en 0.
4. Soit $g : x \mapsto \pi\operatorname{cotan}(\pi x)$. Calculer $\dfrac{1}{2}g(x) + \dfrac{1}{2}g\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$. Montrer que $f-g$ est 1-périodique.
5. Montrer que $f = g$.

Exercice 179. Centrale PSI 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer l'existence de I_n.
2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 180. Centrale PSI 2017

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$

1. Expliciter une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(u_n) + \alpha\ln(n)$.
   Étudier, en fonction de α, le comportement de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 181. Centrale PSI 2017

Soit $F = \left\{f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R}),\ f(0)=0, f(1)=1\right\}$. Soit $g \in F$ croissante et telle que $g'(1) = 0$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1]$, $f_n(x) = \begin{cases} g(nx)\mathrm{e}^{x-1} & \text{si } x \in \left[0;\dfrac{1}{n}\right] \\ \mathrm{e}^{x-1} & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{n};1\right] \end{cases}$

1. Montrer que $f_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On pose $I_n = \int_0^1 |f_n(x) - f_n'(x)|\,\mathrm{d}x$. Montrer que (I_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.
3. Trouver un équivalent de $I_n - \ell$.

Exercice 182. CCP PSI 2017

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $t \mapsto \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) & \text{si } t \in]0;n[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}\,t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}\,t$.
3. Sachant que $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}\,t = -\gamma$.
   (On pourra effectuer le changement de variable $t = nu$ puis faire une intégration par parties).

*corrigé

Exercice 183. ENSAM PSI 2017

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{t+1}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer la limite de cette suite.
3. Calculer $a_n + a_{n+1}$ et en déduire un équivalent de a_n en $+\infty$ (utiliser des encadrements).
4. Prouver la convergence et calculer la somme des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. (on admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

*corrigé

Exercice 184. TPE PSI 2017

1. Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right) - \ln(n)$ converge lorsque $n \to +\infty$ vers un réel que l'on notera γ.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}\,t$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}\,t = -\gamma$.

*corrigé

Exercice 185. TPE PSI 2017

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n = t \mapsto n\cos(t)\sin^n(t)$ Étudier la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. *corrigé

Exercice 186. ICNA PSI 2017

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$\forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f_n(x) = n(\cos(x))^n \sin(x)$. *corrigé

Exercice 187. St Cyr PSI 2017- Python

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$.

1. Programmer en Python le calcul de I_n avec une complexité en $O(n)$ (sans importer aucune bibliothèque).
2. Afficher nI_n^2 en fonction de n et donner sans démonstration un équivalent de I_n en $+\infty$.
3. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}\,t$.
4. Donner une relation liant I_n et I_{n+1}, puis en déduire un équivalent de I_n en $+\infty$.

Exercice 188. Mines-Ponts PSI 2017

On définit une fonction f par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer la classe de dérivabilité de f.
3. Trouver une équation différentielle satisfaite par f et la résoudre.

Exercice 189. Mines-Ponts PSI 2017

1. Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-nx})$.
2. Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I.
3. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la calculer.
4. Trouver un équivalent de f en 0. *Donnée :* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 190. Mines-Ponts PSI 2017

Soit b et c dans $\mathbb{R}_+^*$, (a_n) une suite de réels telle que $a_n = o(c^n)$ quand n tend vers l'infini.
On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x-a_n|}{b^n}$.

1. Trouver une condition sur b pour que f soit définie sur un domaine D non vide.
2. Étudier alors la continuité, puis la dérivabilité, de f sur D.

Exercice 191. Mines-Ponts PSI 2017

On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{H_n}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $S : t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)$.
2. Montrer que $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $]0;a]$, avec $a \in]0;1[$.
3. $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge-t-elle normalement sur $]0;1[$?
4. Montrer que S est continue sur $]0;1]$. Est-elle dérivable sur $]0;1]$?

*corrigé

Exercice 192. Mines-Ponts PSI 2017

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \ln(1+e^{-nx})$. On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

1. Donner l'ensemble de définition I de $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.
2. Montrer que f est continue et décroissante sur I.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et donner un équivalent de f en 0.

Exercice 193. Mines-Ponts PSI 2017

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum \frac{e^{-nx}}{1+n}$. On note f sa fonction somme.
2. f est-elle continue ? dérivable ?

3. Étudier la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 194. Centrale PSI 2017

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.
   (a) Donner un exemple d'une telle fonction.
   (b) Étudier la suite $\left(\dfrac{f(n+1)}{f(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (convergence et limite).
   (c) Établir la convergence de la série $\sum f(n)$.
2. On suppose maintenant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \in \mathbb{R}_-^*$.
   (a) Donner un exemple d'une telle fonction.
   (b) Que dire de la série $\sum f(n)$?
   (c) Étudier, en fonction de β, la convergence de $\sum n^\beta f(n)$.

Exercice 195. Centrale PSI 2017-Python

On pose $f_n(x) = \prod\limits_{0\leqslant i\leqslant n} \dfrac{1}{x+i}$, $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que F et G sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Tracer les courbes de F et G sur des intervalles raisonnables. Tracer ensuite $\dfrac{F}{G}$. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Justifier l'existence d'une famille $(a_{i,n})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{a_{i,n}}{x+i}$.
   À l'aide d'équivalents au voisinage des points $-i$, exprimer les coefficients $a_{i,n}$.
   (b) Montrer alors la conjecture faite à la question précédente.

Exercice 196. Centrale PSI 2017-Python

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant les conditions suivantes :
$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g(t+1) - g(t) = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$; $g(1) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g'(t) = 0$.

1. Déterminer g' sous forme de somme d'une série de fonctions. *Ind.* Considérer $g'(t+1) - g'(t)$.
2. Déterminer g sous forme de somme d'une série de fonctions.
3. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite telle que $z_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = z_n + i\dfrac{z_n}{|z_n|}$.
   Montrer que cette suite est bien définie.
4. Calculer les dix premiers termes de la suite (z_n).
5. Tracer $z_1, z_2, \cdots z_{10}$ dans le plan complexe, et sur la même figure l'arc paramétré défini par $\begin{cases} x(t) &= \sqrt{t}\cos(g(t)) \\ y(t) &= \sqrt{t}\sin(g(t)) \end{cases}$
6. Formuler une conjecture puis la démontrer.
7. Trouver un équivalent de $g(n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 197. CCP 2017 Medico

Soit $u_n : x \mapsto \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$?

2. Montrer que la somme S de la série est continue sur $\mathcal{D}$.
3. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}\backslash]-\alpha;\alpha[$.
4. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

*corrigé

Exercice 198. CCP 2017 Viceriat

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}$.
Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout réel de $\mathbb{R}^*$. *corrigé

Exercice 199. CCP PSI 2017

Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}x(1+nx^2)}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$. *corrigé

Exercice 200. Mines-Telecom 2017 Viceriat

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Soit $I = \left[0;+\infty\right[$ et $\forall x \in I, u_n(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$.
Étudier la convergence simple, normale et uniforme sur I de la série de terme général $u_n(x)$. *corrigé

Exercice 201. Mines-Ponts PSI 2017

Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+2)2^n}$.

Exercice 202. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.

1. Trouver l'ensemble de définition de f. Préciser la régularité de f.
2. La fonction f est-elle développable en série entière ?

Exercice 203. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $f : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Soit $x \in \left[0;1\right[$. Donner l'expression de $f(x)$.

Exercice 204. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{x\mathrm{sh}(\alpha)}{x^2-2x\mathrm{ch}(\alpha)+1}$.

Exercice 205. Mines-Ponts PSI 2017

Décomposer en série entière l'application $f = x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}\,t}{1+t+t^2}$

Exercice 206. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $(a_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{a_{n+3}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\to} l \in \mathbb{C}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. Que dire si $\left|\frac{a_{n+3}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$?

Exercice 207. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0;a\right[$ dont toutes les dérivées successives sont positives.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R_n(x)$ le reste intégral d'ordre n de f entre 0 et x.
   Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ est croissante.
2. En déduire que f est développable en série entière sur $\left[0;a\right[$.

Exercice 208. Mines-Ponts PSI 2017

Déterminer les réels a et b tels que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.

Exercice 209. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(|1-t|)}{t}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Quel est son rayon de convergence ?
3. Calculer $f(1)$.
4. Étudier la dérivabilité de f.

*corrigé

Exercice 210. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de partitions de $\left\{1;2;\cdots n\right\}$.

1. Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$. On pose $p_0 = 1$.
2. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$ vérifier $R \geqslant 1$ et calculer sa fonction somme S sur $\left]-R;R\right[$.

*corrigé

Exercice 211. Mines-Ponts PSI 2017

Étudier la convergence puis calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{(1+2i)^n}$

Exercice 212. Mines-Ponts PSI 2017

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(t))^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$.
2. Comparer $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(t))^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 213. Mines-Ponts PSI 2017

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$ et l'exprimer plus simplement avec des fonctions usuelles.

Exercice 214. Mines-Ponts PSI 2017

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$.

Exercice 215. Centrale PSI 2017

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

1. Prouver la convergence et déterminer la limite de cette suite.
2. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
3. Soit (v_n) une suite de réels convergeant vers une limite ℓ. Montrer que $w_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$ tend aussi vers ℓ.
4. À l'aide de la suite de terme général $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$, déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 216. Centrale PSI 2017-Python

Soit f une fonction non identiquement nulle, continue et positive définie sur $\left[0;1\right]$. On note $M = \sup\limits_{x\in[0;1]} \{f(x)\}$.

On choisit $f_1 : x \mapsto x(1-x)(1+\cos(5\pi x))$

1. Tracer le graphe de f_1 sur $[0;1]$ et déterminer une valeur approchée de M.
2. Écrire une fonction prenant en argument n et retournant $I_n = \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n \,\mathrm{d}x$.
3. Tracer le graphe de $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} I_k x^k$ sur $[-a;a]$ où $a = \dfrac{1}{M} + 0,1$ pour $f = f_1$. et $n \in \left\{10,20,30,40,50\right\}$. Commenter.
4. Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.
5. Soit $u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$. Tracer les points $A_n(n,u_n)$ pour les 30 premières valeurs et $f = f_1$. Que conjecturer ?
6. Étudier la monotonie et la convergence de (u_n).

Exercice 217. Centrale PSI 2017-Python

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2-\mathrm{e}^x}$, et on note $\forall n \in \mathbb{N},\ a(n) = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a(n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a(n-k)}{k!}$. (On pourra utiliser la fonction $x \mapsto (2-\mathrm{e}^x)f(x)$).
2. Écrire, avec Python, une procédure permettant de calculer $a(n)$ pour $n \in [[0;10]]$.
3. Tracer les courbes $(n, a(n))$, $\left(n, \dfrac{1}{(\ln(2))^n}\right)$ et $\left(n, \dfrac{1}{2(\ln(2))^n}\right)$. En déduire le rayon de convergence de $\sum a(n)x^n$. On note S sa fonction somme.
4. Tracer l'approximation de la courbe de S grâce aux sommes partielles pour $n \in [[0;6]]$.
5. Tracer la courbe de f sur $\left[0;10\right]$. que peut-on en déduire ? Le démontrer.

Exercice 218. Centrale PSI 2017-Python

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\theta_n : \left[-1;1\right] \to \mathbb{R}$, par $\theta_n(x) = \prod_{k=0}^{n}\left(1-x^{2^k}\right)$.

1. Tracer θ_{10}.
2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(\theta_n(x))$ en fonction de x.
3. Montrer que la limite θ de la suite (θ_n) est continue sur $\left]-1;1\right[$ et vérifie la relation $\theta(x) = (1-x)\theta\left(x^2\right)$ pour tout $x \in \left[-1;1\right]$.
4. Montrer que θ ne s'annule pas sur $\left]-1;1\right[$.
5. Trouver toutes les fonctions $f : \left]-1;1\right[\to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = (1-x)f\left(x^2\right)$ pour tout $x \in \left]-1;1\right[$.
6. On admet que θ est développable en série entière sur $\left]-1;1\right[$. Déterminer les coefficients du développement.

7. Démontrer le résultat admis à la question précédente.

Exercice 219. Centrale PSI 2017

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on définit $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

1. Pour $k \in \mathbb{Z}$, déterminer $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ki\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
2. Pour $r \in \left[0; R\right[$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|S_n\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k}$
3. Montrer que $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 220. Centrale PSI 2017

1. Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \mathrm{ch}(x\mathrm{sh}(t))\,\mathrm{d}t$
   (a) Montrer que f est définie, continue et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
   (c) Déterminer une solution développable en série entière ce cette équation différentielle.
2. (a) Cours : Donner la définition d'une fonction continue par morceaux.
   (b) Soit f définie par $f(0) = 0$ telle que $\forall x \neq 0,\ f(x) = \frac{1}{x}$. f est-elle continue par morceaux sur $\left[0;1\right]$? sur $\left]0;1\right[$?
   (c) Donner les représentation graphiques des courbes des fonctions ch et sh.
   Comment se comportent-elles en $+\infty$? Quelle est la valeur de $\mathrm{ch}(1)$?
   Donner une relation entre ch^2 et sh^2.
   (d) Si $f' = g'$, à quelle condition existe-t-il une constante C telle que $f = g + C$?
   Que vaut $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$?
   (e) Topologiquement qu'est-ce que le produit cartésien de deux segments ?
   (f) Donner le théorème de Cauchy. Est-il applicable dans la question 1 ?
   Quelle est la forme de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle obtenue ?
   (g) Donner un exemple de série entière de rayon de convergence infini, de rayon de convergence nul.
   Définir le rayon de convergence. Quels sont les modes de convergence d'une série entière ?

Exercice 221. Centrale PSI 2017

On donne $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ où a et b sont deux réels strictement positifs, et on pose $v_n = \ln\left(n^{b-a}u_n\right)$.

1. Montrer la convergence de $\sum (v_{n+1} - v_n)$.
2. En déduire une condition sur a et b pour que $\sum u_n$ converge.
3. Cette condition étant vérifiée, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour tout réel x tel que cette série converge.
   Donner l'ensemble de définition de f, et calculer $f(1)$.

Exercice 222. Centrale PSI 2017-Python

1. Donner l'ensemble de définition D de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
2. Tracer, avec python, la représentation graphique de f à 10^{-5} près.

3. Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}\,t$ est définie sur D et est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left]-1;1\right[$.
4. Tracer, avec python, la représentation graphique de g et conjecturer un lien entre f et g.
5. Calculer $f'(x)$ pour $x \in D \cap \mathbb{R}_+^*$ et démontrer la conjecture précédente.
6. Déterminer, pour $x \in D \cap \mathbb{R}_+^*$, une relation entre $g(1)$, $g(x)$, $g(1-x)$ et une autre fonction que l'on précisera. (On pourra faire une intégration par parties et/ou un changement de variable).
7. En déduire g puis f sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 223. CCP 2017 Peyrard

Soit $S = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n(3n+2)}$

1. trouver trois réels a, b, c tels que :
   $\forall x > 1, \quad \dfrac{x}{x^3-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$
2. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^3-1}$ sur $\left]1;+\infty\right[$
3. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$
4. Calculer S.

*corrigé

Exercice 224. CCP 2017 Louvet

Soit, pour n dans $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$, et, pour x réel $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}\,t$. On admet que $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Étudier la convergence de l'intégrale définissant I_n.
2. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $I_n = \sqrt{\pi}\dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}$.
4. Donner l'ensemble de définition de F.
5. En utilisant le développement en série entière de la fonction cosinus, calculer F

*corrigé

Exercice 225. CCP 2017 Cholin

Soit pour tout entier naturel n, $\quad a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}\,t$.

1. Montrer que la suite (a_n) est convergente.
2. Calculer sa limite.
3. Montrer que la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.
4. • Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant \dfrac{1}{2n+1}$.
   • Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

*corrigé

Exercice 226. CCP PSI 2017

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2\left(1+x^{2n}\right)}$

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Déterminer la limite de $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}\,t$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\sum f_n(x)$ converge. On note $S(x)$ la somme de cette série.
4. Exprimer, pour $x > 0$, $S\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $S(x)$.
5. Étudier la continuité de S sur $\mathbb{R}^+$.
6. Préciser la limite de $S(x)$ en $+\infty$.

*corrigé

Exercice 227. CCP PSI 2017

Soit $a > 0$, $I = \left[-a; a\right]$ et $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|\varphi(x)| \leqslant C|x|$. On s'intéresse alors à l'ensemble E des fonctions $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x)$ pour tout $x \in I$.

1. Montrer que l'application $\Phi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est définie et continue sur I puis que $\Phi \in E$.
2. Que dire de la différence de deux éléments de E ? En déduire E.
3. On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que Φ est dérivable.

*corrigé

Exercice 228. CCP PSI 2017

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + \cdots + x^n}\,\mathrm{d}\,x$.

1. Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

*corrigé

Exercice 229. CCP PSI 2017

Déterminer le rayon de convergence puis la fonction somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) x^n\right)$. *corrigé

Exercice 230. CCP PSI 2017

Soit $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(1 + xt)}{t}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de g contient $\left]-1; 1\right[$.
2. Trouver un développement en série entière de g sur $\left]-1; 1\right[$.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0; 1\right[$ et calculer g' par deux méthodes différentes.

*corrigé

Exercice 231. ENSAM PSI 2017

On considère l'équation différentielle $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.

1. Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $\left]-\alpha; \alpha\right[$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
   Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit solution de (E).
2. Montrer que (E) admet une unique solution φ développable en série entière telle que $\varphi(0) = 1$.
   Quel est son rayon de convergence ?
3. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}_+$ et donner leur développement.
4. Déterminer l'expression de φ sur $\mathbb{R}$.

*corrigé

Exercice 232. ENSAM PSI 2017

1. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.
2. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ puis calculer I sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} = \frac{\pi^2}{6}$.

*corrigé

Exercice 233. Mines-Telecom 2017 Fadel

Soit $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} x^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$
Déterminer le domaine de définition de S.
*corrigé

Exercice 234. Mines-Telecom PSI 2017

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh(x)}}\,\mathrm{d}x$ existe.
2. En utilisant le développement en série entière de $\frac{1}{1-u}$, montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$
3. Calculer I (on donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

*corrigé

Exercice 235. Mines-Telecom PSI 2017

On s'intéresse à $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n}$

1. Donner le domaine de définition de S.
2. Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.
3. Montrer que S est monotone sur son domaine de définition.
4. Que dire de S au voisinage de $+\infty$?

*corrigé

Exercice 236. TPE PSI 2017

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}\cos(\sin(x))$ et $g(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}\sin(\sin(x))$.

1. Trouver deux suites (a_n) et (b_n) vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$.
2. Calculer les intégrales $I_n = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Que dire de $\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{2\pi} g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$?

*corrigé

Exercice 237. Navale PSI 2017

Développer $f(x) = \frac{1}{2+x-x^2}$ en série entière. *corrigé

Exercice 238. Mines-Ponts PSI 2017

Étudier l'arc paramétré défini par : $\begin{cases} x(t) & \to \dfrac{t^3}{t^2-1} \\ y(t) & \to \dfrac{1}{t^3-t} \end{cases}$.

Exercice 239. Mines-Ponts PSI 2017

Tracer l'arc paramétré $M(t) = \left(\tan\left(\dfrac{t}{3}\right), \sin(t)\right)$ et étudier ses asymptotes.

Ind. Considérer $M\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Exercice 240. Centrale PSI 2017-Python

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant les conditions suivantes :

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g(t+1) - g(t) = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$; $g(1) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g'(t) = 0$.

1. Déterminer g' sous forme de somme d'une série de fonctions. *Ind.* Considérer $g'(t+1) - g'(t)$.
2. Déterminer g sous forme de somme d'une série de fonctions.
3. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite telle que $z_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = z_n + i\dfrac{z_n}{|z_n|}$.
   Montrer que cette suite est bien définie.
4. Calculer les dix premiers termes de la suite (z_n).
5. Tracer $z_1, z_2, \cdots z_{10}$ dans le plan complexe, et sur la même figure l'arc paramétré défini par $\begin{cases} x(t) & = \sqrt{t}\cos(g(t)) \\ y(t) & = \sqrt{t}\sin(g(t)) \end{cases}$
6. Formuler une conjecture puis la démontrer.
7. Trouver un équivalent de $g(n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 241. CCP PSI 2017

Étudier l'arc parmétré γ : $\quad t \mapsto \begin{cases} x(t) & = \dfrac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) & = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$

Préciser notamment les tangentes parallèles aux axes des repères, les points particuliers et les branches infinies de l'arc paramétré. *corrigé

Exercice 242. Mines-Ponts PSI 2017

L'application $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $H(x,y) = \dfrac{x^4 y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $H(0,0) = 0$, est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 243. Mines-Ponts PSI 2017

Déterminer l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Exercice 244. Mines-Ponts PSI 2017

Soit H définie sur $\mathbb{R}^2$ par $H(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $H(0,0) = 0$.

H est elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 245. Centrale PSI 2017-Python

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\varphi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_M(X) = {}^tXMX$.

1. Exemple : dans cette question, $n = 2$ et $M = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Tracer la surface d'équation $z = \varphi_M(x,y)$ pour $(x,y) \in \left[-2;2\right]^2$.

(b) Déterminer les éventuels extrema locaux de φ_M.

(c) Montrer que φ_M est surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. On revient au cas général.

(a) Montrer que M peut se décomposer en somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique A. Cette décomposition est-elle unique ?

(b) Écrire en Python une fonction qui donne la partie symétrique d'une matrice carrée M.

(c) Montrer que $\varphi_M = \varphi_S$.

3. On suppose que M est nilpotente.

(a) Montrer que $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(S)$.

(b) Trouver le spectre de M.

(c) Déterminer $\varphi_M(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 246. Centrale PSI 2017

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Dériver la fonction $F : t \mapsto f(\varphi(t), \psi(t))$.

Exercice 247. Centrale PSI 2017

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ si $y \geqslant 0$, $f(x,y) = 0$ sinon.

1. La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$? Déterminer ses lignes de niveau.
2. On considère une droite D_α dans $\mathbb{R}^2$, de pente α et passant par le point $P = (1;1)$.
Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x,y)$ et C la courbe tracée sur S et dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est D_α. Soit M un point de C.
Déterminer la tangente à C en M.

Exercice 248. Centrale PSI 2017

Soit $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \max(x,y) \leqslant 2,\ \min(x,y) \geqslant -2\right\}$.
Soit $F : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. F admet-elle des extrema sur A ?
2. Quels points sont susceptibles d'être des extrema locaux ?
3. Étudier $x \mapsto F(x,x)$ et $x \mapsto F(-x,x)$. Qu'en déduire concernant l'un des extrema locaux envisageables ?
4. Donner les extrema de F sur A, puis tous ses extrema sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 249. CCP PSI 2017

Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + \ln\left(4 + y^2\right)$

1. Montrer que f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $f(x,y) - f(0,0)$, et donner un équivalent de f en $(0,0)$.
3. f admet-elle des extrema locaux ?

*corrigé

Exercice 250. ENSAM PSI 2017 - Python

On veut tracer la courbe C d'équation $f(x,y) = 0$ si $f(x,y) = x^4 + 2y^2 + 2xy$.

1. Écrire une fonction **f** qui prend en argument une liste u=**array**$([x,y])$ qui renvoie la valeur $f(x,y)$.

2. Écrire une fonction **nablaf** qui prend en argument une liste u=**array**$([x,y])$ qui renvoie la valeur $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$.
3. Écrire une fonction **points** qui prend en argument un nombre pas de type float, une fonction f et en entier n de type int et qui renvoie la la liste des points A_k approchant $\mathcal{C}$, telle que :
   $A_0 \in \mathcal{C}$, et $\forall k \in [[0;n-1]]$, $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = pas * \overrightarrow{V_t}$
   (avec $pas > 0$, $n \geqslant 2$, et $\overrightarrow{V_t}$ un vecteur unitaire tangent à $\mathcal{C}$ en A_k).
4. Tracer $\mathcal{C}$ en utilisant la fonction **points**.

Exercice 251. St Cyr PSI 2017

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y,z) = \dfrac{\arctan(xyz)}{1+(xyz)^2} - \dfrac{\pi}{8}$.
Donner l'équation du plan tangent en $(1;1;1)$ à la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$. *corrigé

Exercice 252. Mines-Ponts PSI 2017

1. Donner le domaine de définition de la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$.
2. Trouver un équivalent de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \ln(\Gamma(t))\,\mathrm{d}\,t$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. En déduire un équivalent de $\ln \circ \Gamma$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 253. Mines-Ponts PSI 2017

On définit $f :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{x+\mathrm{ch(t)}}$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Prouver le caractère $\mathcal{C}^1$ de f.
3. Établir l'existence et la valeur de la limite de f en $+\infty$.
4. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 254. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit identiquement nulle sur $\mathbb{R}\backslash\big[-A;A\big]$.
Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Déterminer le domaine de définition D de F. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists C_n \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |F(x)| \leqslant \dfrac{C_n}{x^n}$.

Exercice 255. Mines-Ponts PSI 2017

1. Soit $f : t \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-t\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$.
   Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad ty'' + y' - ty + 1 = 0$.
2. Trouver les solutions développables en série entière de (E).
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}\,x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 256. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Trouver le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Montrer que $\int_0^X e^{ix^2}\,dx$ a une limite finie quand X tend vers $+\infty$ et la calculer.

Exercice 257. Mines-Ponts PSI 2017

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)e^{-xt}}{t}\,dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer $f(0)$.

Exercice 258. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t^3+t}}\,dt$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 259. Centrale PSI 2017

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et f'' est à valeurs strictement positives.

1. Montrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = x\int_0^1 f'(ux)\,du$.
2. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xg(x)$.
3. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2h(x)$.

Exercice 260. Centrale PSI 2017

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. Montrer que f est dérivable sur D et calculer sa dérivée.
4. En déduire l'expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 261. Centrale PSI 2017

Soit $F : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}+t+1}\,dt$.

1. Trouver la domaine de définition de F.
2. Montrer que F est dérivable sur son domaine de définition et exprimer sa dérivée.
3. Montrer que $F(x) \sim \frac{\ln(3)}{2x}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 262. Centrale PSI 2017

1. Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \mathrm{ch}(\mathrm{xsh(t)})\,\mathrm{dt}$
   (a) Montrer que f est définie, continue et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
   (c) Déterminer une solution développable en série entière ce cette équation différentielle.
2. (a) Cours : Donner la définition d'une fonction continue par morceaux.
   (b) Soit f définie par $f(0) = 0$ telle que $\forall x \neq 0,\ f(x) = \frac{1}{x}$. f est-elle continue par morceaux sur $[0;1]$? sur $]0;1[$?

(c) Donner les représentation graphiques des courbes des fonctions ch et sh.
Comment se comportent-elles en $+\infty$? Quelle est la valeur de $\mathrm{ch}(1)$?
Donner une relation entre ch^2 et sh^2.

(d) Si $f' = g'$, à quelle condition existe-t-il une constante C telle que $f = g + C$?
Que vaut $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$?

(e) Topologiquement qu'est-ce que le produit cartésien de deux segments ?

(f) Donner le théorème de Cauchy. Est-il applicable dans la question 1 ?
Quelle est la forme de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle obtenue ?

(g) Donner un exemple de série entière de rayon de convergence infini, de rayon de convergence nul.
Définir le rayon de convergence. Quels sont les modes de convergence d'une série entière ?

Exercice 263. CCP PSI 2017

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $x > 0$.
Calculer $f(x-1) - f(x)$. En déduire une écriture de $f(x)$ sous forme d'une somme de série.
4. Par quelle autre méthode peut-on retrouver ce résultat ?

*corrigé

Exercice 264. CCP PSI 2017

Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de g contient $\left]-1;1\right[$.
2. Trouver un développement en série entière de g sur $\left]-1;1\right[$.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0;1\right[$ et calculer g' par deux méthodes différentes.

*corrigé

Exercice 265. Mines-Telecom 2017 Louvet

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^n$ sur D pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

*corrigé

Exercice 266. Mines Telecom PSI 2017

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ln(t)}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Montrer que f est définie sur $D = \left]-1;+\infty\right[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
3. Trouver une expression simple de f.

*corrigé

Exercice 267. Mini Mines 2017 Beraud 20' de préparation, 20' de passage.
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle est paire.
2. Montrer que F est dérivable et déterminer sa dérivée.
3. Montrer que F est deux fois dérivable et déterminer F''
4. Donner une expression plus simple de F'' et en déduire F.

*corrigé

Exercice 268. Mines-Ponts PSI 2017
Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $(a,b) \in \left(\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)^2$. Soit (E) l'équation différentielle : $y^p(t)\left(y'(t) + a(t)y(t)\right) = b(t)$.
Montrer qu'il existe un intervalle I ouvert contenant t_0 tel que (E) admette une unique solution sur I vérifiant $y(t_0) = x_0$.

Exercice 269. Centrale PSI 2017
Soit (S) le problème de Cauchy $\begin{cases} y' - 2xy &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$
Donner la solution sous forme de série entière et préciser son rayon de convergence.
Exprimer ensuite la solution à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 270. Centrale PSI 2017
On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E).
2. Soit f une solution de (E). On pose $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} f(x)$.
   Déterminer $g(x)$ (on demande une expression avec une seule intégrale).
   En déduire l'ensemble des solutions de (E).
3. Montrer que toute solution de (E) se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Soit f une solution de (E). Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 271. CCP 2017 Peltier
Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = & & y & -z \\ y' = & -2x & +y & -z \\ z' = & -2x & +3y & +z \end{cases}$ *corrigé

Exercice 272. CCP 2017 Beraud et Yvernat

1. Trouver les coefficients a, b, c tels que $\dfrac{1}{t(t^2-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1} + \dfrac{c}{t+1}$.
2. Résoudre l'équation différentielle suivante :
   $t(t^2-1)x' + 2x = t^2$

*corrigé

Exercice 273. ENSAM PSI 2017
Soit $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une solution du système différentiel $\begin{cases} x'(t) &= z(t) \\ y'(t) &= 2z(t) \\ z'(t) &= x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases}$.
Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $M(0)$ pour que la trajectoire de $M(t)$ soit bornée lorsque $t \in \mathbb{R}_+$ puis lorsque $t \in \mathbb{R}$. *corrigé

Exercice 274. ENSAM PSI 2017
On considère l'équation différentielle $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.

1. Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $\left]-\alpha;\alpha\right[$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
   Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit solution de (E).
2. Montrer que (E) admet une unique solution φ développable en série entière telle que $\varphi(0) = 1$.
   Quel est son rayon de convergence ?
3. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ et $x \mapsto e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}_+$ et donner leur développement.
4. Déterminer l'expression de φ sur $\mathbb{R}$.

*corrigé

Exercice 275. TPE PSI 2017

1. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle : $y'' + \dfrac{1}{t^2}y = 0$ en posant $t = e^x$.
2. Donner toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

*corrigé

3 Probabilités

Exercice 276. Mines-Ponts PSI 2017
Une urne contient une boule rouge et une boule blanche. On effectue n tirages successifs dans cette urne selon le protocole suivant :

- Si la boule est rouge on la remet dans l'urne et on rajoute deux boules rouges dans l'urne.
- Si la boule est blanche on se contente de la remettre dans l'urne.

1. Quelle est la probabilité que les n premières boules soient rouges ?
2. Énoncer le théorème de continuité croissance et de continuité décroissance des probabilités.
3. Calculer la probabilité de toujours tirer une boule rouge.

Exercice 277. CCP PSI 2017
Soit $(A_k)_{k\geqslant 1}$ une famille finie d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$. Montrer :
$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) + n - 1$. *corrigé

Exercice 278. TPE PSI 2017
On tire cinq cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir dans la main au moins une carte de chaque couleur ? *corrigé

Exercice 279. TPE PSI 2017
On lance une infinité de fois une pièce qui fait pile avec un probabilités $p \in \left]0;1\right[$. On définit les événements :

- A : " on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre paire de lancers" ;
- B : " on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 3" ;

1. Calculer $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

*corrigé

Exercice 280. Mines-Ponts PSI 2017
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue n tirages successifs

sans remise. On note X_k le numéro de la boule tirée à la k-ème étape. On dit qu'il y a un pic à la k-ème étape si $X_k > \max\left\{X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}\right\}$. On convient qu'il y a toujours un pic au premier tirage. On note S_n le nombre de pics au cours des n tirages.

1. Déterminer $\mathbf{P}(S_n = 1)$ et $\mathbf{P}(S_n = n)$.
2. Soit T_k la variable indicatrice de l'événement : "il y a un pic au k-ème tirage".
   Déterminer la loi de T_k. Donner l'espérance de S_n.

Exercice 281. Mines-Ponts PSI 2017

On dispose de $p+1$ urnes $U_0, U_1, \cdots, U_p$ contenant chacune p boules; l'urne U_i contient i boules blanches. On choisit une des urnes aléatoirement, et on en tire successivement n boules avec remise. On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la probabilité que $N_p = k$ sachant qu'on a choisi l'urne U_i.
2. Déterminer l'espérance de N_p.

Exercice 282. Mines-Ponts PSI 2017

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n.
On pioche une poignée de jetons dans cette urne. Et on admet que chaque poignée, y compris la poignée vide a la même probabilité d'être tirée.
Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire S égale à la somme des numéros tirés.

Exercice 283. Centrale PSI 2017

1. On joue à pile ou face avec une pièce truquée tombant sur pile avec une probabilité p.
   On note X_n le nombre de piles obtenus au bout de n lancers.
   Donner la loi de X_n.
2. On considère maintenant deux pièces M_1 et M_2 donnant pile avec des probabilités p_1 et p_2. On joue de la manière suivante : à chaque lancer, on joue avec la pièce M_1 si le lancer précédent a donné pile, avec M_2 sinon. Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard.
   Soit A_n l'événement : "on obtient pile au n-ième lancer" et $u_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(A_n \\ \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n en fonction de u_{n-1}. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   (b) Déterminer le comportement asymptotique de la suite (u_n).

Exercice 284. Centrale PSI 2017-Python

Un plateau de jeu de type monopoly comporte un circuit de 12 cases numérotées de 0 à 11. Le joueur commence sur la case 0.
On note Y_n la variable aléatoire égale au numéro sur lequel se trouve le joueur après le n-ième lancer d'un dé classique équilibré à six faces. On suppose que les lancers sont mutuellement indépendants.

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n(\Omega) \subset [[0;11]]$, et donner la loi de Y_0.
2. Écrire une fonction de paramètre n et évaluant Y_n pour une réalisation aléatoire du jeu.
3. Afficher les fréquences, sur la réalisation aléatoire de 5000 parties du jeu, de l'événement $(Y_n(\omega) = k)$ pour $n \in \left\{50, 100, 200, 500\right\}$.
4. Exprimer $\mathbf{P}(Y_{n+1} = k)$ en fonction des $(\mathbf{P}(Y_n = i))_{0 \leqslant i \leqslant 11}$.
5. Soit $U_n = {}^t(\mathbf{P}(Y_n = 0), \mathbf{P}(Y_n = 1), \cdots, \mathbf{P}(Y_n = 11)) \in \mathcal{M}_{12,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe une matrice P telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = PU_n$.
6. Exprimer U_n en fonction de U_0. P est-elle diagonalisable ?

Exercice 285. Centrale PSI 2017

Soit une famille $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, d'espérances nulles et prenant un nombre fini de valeurs.

1. Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ h_+(\varepsilon) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}\left(t\varepsilon - \ln\left(\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX_1}\right)\right)\right) > 0$.
2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $\mathbf{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-nh_+(\varepsilon)}$.
3. Montrer que : $\quad \forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbf{P}(S_n \geqslant n\varepsilon)\mathbf{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{m} X_{n+k} \geqslant m\varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(S_{n+m} \geqslant (n+m)\varepsilon\right)$.

Exercice 286. CCP PSI 2017

Soit n variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots X_n$, mutuellement indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \dfrac{1}{2}, \cdots, \dfrac{1}{n}$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire N qui vaut 0 si $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1$ et $\min\{k \in [[1;n]], X_k = 0\}$ sinon.
*corrigé

Exercice 287. ENSAM. python PSI 2017

1. Soit $p \in [0;1]$. Écrire une fonction prenant en argument p et renvoyant la valeur 1 avec probabilité p, la valeur -1 avec probabilité $1-p$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :
   pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = -1) = 1-p$.
   On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
   Écrire une fonction d'arguments p et n, et qui renvoie la liste $[S_0, S_1, \cdots, S_n]$.
   Conjecturer la limite de la suite (S_n) en fonction de p.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $T_n = \min\left\{k \in \mathbb{N},\ |S_k| = n\right\}$. Écrire une fonction d'arguments p, n et un entier $N > 0$, qui renvoie une liste de N tirages de la variable aléatoire T_n.

Exercice 288. ENSAM PSI 2017

Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de même paramètre $\dfrac{1}{2}$. Soit T la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel que $X_n = X_{n+1} = 1$. On note :
A_n : "Pour tout $k \in [[1;n]]$, les valeurs de X_{k-1} et de X_k ne sont pas toutes deux égales à 1 et $X_n = 0$"
B_n : "Pour tout $k \in [[1;n]]$, les valeurs de X_{k-1} et de X_k ne sont pas toutes deux égales à 1 et $X_n = 1$"
On note $p_n = \mathbf{P}(A_n)$ et $q_n = \mathbf{P}(B_n)$.

1. Calculer $\mathbf{P}(T=0)$, $\mathbf{P}(T=1)$, $\mathbf{P}(T=2)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(T = n) = \dfrac{F_{n+1}}{2^{n+2}}$ où $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

*corrigé

Exercice 289. Mines-Ponts PSI 2017

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ possédant une espérance.

1. Montrer que $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k)$.
2. On considère une urne de N boules numérotées de 1 à N.
   On effectue n tirages avec remise et on note X_N le plus grand des numéros tirés.
   Calculer $\mathrm{E}(X_N)$ sans simplifier l'expression. Trouver un équivalent quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 290. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires $a_{i,j}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et admettant toutes une espérance.

1. Dans le cas où $n = 2$, justifier l'existence de $\mathrm{E}(\det(A))$. Montrer que $\mathrm{E}(\det(A)) = \det((\mathrm{E}(a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n})$.
2. Généraliser pour n quelconque.
3. On suppose que les $a_{i,j}$ suivent toutes la même loi. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathrm{E}(\chi_A(x))$.

Exercice 291. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $X_1, X_2, \cdots X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi :
$\forall k \in [[1;n]]$, $\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \dfrac{1}{2}$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Majorer $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right) = \mathrm{ch}^{\mathrm{n}}(\mathrm{t})$.
3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{ch}(\mathrm{t}) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{t}^2}{2}}$.
4. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right)$.
5. Montrer que $\mathbf{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-\dfrac{n\varepsilon^2}{2}\right)$.

Exercice 292. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(a)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec a et p dans $]0;1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
On suppose que X, Y et Z sont deux à deux indépendantes.

1. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire U qui vaut 0 si $X = 0$ et Y si $X = 1$.
2. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire V qui vaut Y si $X = 0$ et Z si $X = 1$.

Exercice 293. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire e^{uN} admet une espérance finie que l'on calculera.
2. On note $h : x \mapsto (1+x)\ln(1+x) - x$. Montrer que $\inf\limits_{u>0}\left\{\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{u(1-(1+y)N)}\right)\right\} = \mathrm{e}^{-\lambda h(y)}$.
3. On fixe $y > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(N \geqslant (1+y)\lambda) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda h(y)}$.

Exercice 294. Centrale PSI 2017

Soit $p \in]0;1[$. On se donne une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité p. On la lance jusqu'à obtenir deux fois pile et on note X le nombre de faces obtenues.

1. Donner la loi de X.
2. Montrer l'existence et donner la valeur de l'espérance de X.
3. Si $X = n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne. On pioche une boule au hasard et Y désigne le numéro de la boule piochée.
   Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 295. Centrale PSI 2017

Une urne contient initialement deux boules vertes et une boule noire. À chaque étape, on tire une boule au hasard dans l'urne avec remise et l'on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur que la boule tirée. La variable aléatoire X (resp. Y) désigne le rang de la première boule verte (resp. noire) tirée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Z_n désigne le nombre de boules vertes dans l'urne après n étapes. Enfin U_n est la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée à la n-ème étape est verte et 0 sinon.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Exprimer Z_n en fonction de certains des $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer $Z_n(\Omega)$.
3. Calculer $\mathbf{P}_{Z_n=k}(U_{n+1}=1)$.
4. Démontrer par récurrence que U_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
5. Déterminer la loi de Z_n.

Exercice 296. Centrale PSI 2017

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Soit U une variable aléatoire d'espérance finie. Montrer que $\mathrm{E}(U)=\sum_{j=1}^{+\infty}\mathbf{P}(U\geqslant j)$.
2. On suppose que U^2 est d'espérance finie.
   Montrer que $\sum j\mathbf{P}(U\geqslant j)$ converge et exprimer sa somme à l'aide $\mathrm{E}(U)$ et de $\mathrm{E}(U^2)$.
3. Soit X_n une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi.
   On note $F_k=\sum_{j=1}^{k}\mathbf{P}(X_1=j)$ et $M_n=\max\left\{X_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$.
   Exprimer $\mathbf{P}(M_n\leqslant k)$ en fonction de F_k.

Exercice 297. ENSAM PSI 2017

On considère un jeu dans lequel le joueur doit répondre à une infinité questions numérotées et indépendantes. On note p_k la probabilité de répondre juste à la k-ième question, et $r_n=p_1p_2\cdots p_n$.

1. Soit X le nombre de bonnes réponses avant le premier échec. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général r_n converge. Montrer qu'on a alors $\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}r_n$.
3. Discuter l'existence de l'espérance de X et la calculer lorsque c'est possible dans les cas suivants :
   (a) $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ p_k=\dfrac{1}{2}$;
   (b) $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ p_k=\dfrac{1}{k}$;
   (c) $p_1=1$ et $\forall k\geqslant 2,\ p_k=1-\dfrac{1}{k^2}$.

*corrigé

Exercice 298. Mines-Telecom PSI 2017

1. Soit $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ des variables aléatoires discrètes infinies de même loi mutuellement indépendantes admettant un moment d'ordre 2 et soit $S_n=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$. Soit $a>0$.
   Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev que $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-\mathrm{E}(Y_1)\right|>a\right)\leqslant\dfrac{\mathrm{V}(Y_1)}{na^2}$.
2. On effectue des tirages avec remise d'une boule dans un sac contenant deux boules rouges et trois boules blanches. Au bout de n tirages, on compte le nombre de boules rouges obtenues. Trouver un entier naturel n tel qu'on ait une probabilité d'au moins 95% d'avoir une proportion de boules rouges comprise entre 0,35 et 0,45.

*corrigé

Exercice 299. Mines Telecom PSI 2017

On lance six dés simultanément. lorsqu'un dé vaut 6, on le(s) met de côté et on relance les autres jusqu'à ce que tous les dés vaillent 6.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de lancers à effectuer pour que les six dés vaillent 6 (on pourra calculer sa fonction de répartition).
2. Montrer que X admet une espérance et une variance. Calculer son espérance.

*corrigé

Exercice 300. Mines-Ponts PSI 2017

Un centre d'appel contacte des personnes. Une personne décroche avec une probabilité $p \in \left]0;1\right[$. Il y a n personnes à contacter, par des appels successifs et indépendants. On note : X_1 le nombre de personnes ayant décroché à la première vague d'appels, X_2 le nombre de personnes ayant décroché à la seconde vague d'appels (parmi les $n - X_1$ personnes restantes), etc.

1. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. On définit la variable aléatoire Y_i qui donne le numéro de la vague à laquelle la i-ème personne décroche. Déterminer la loi de Y_i.

Exercice 301. Mines-Ponts PSI 2017

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, A et B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in \left]0;1\right[$.
Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation $(E_\omega) : y'' + (A(\omega) - 1)y' + B(\omega)y = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 302. Mines-Ponts PSI 2017

Soit N une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \left]0;1\right[$. On lance N fois une pièce de monnaie équilibrée, et on note X le nombre de faces obtenues.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X conditionnée par $N = n$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence de f.
   (b) Calculer $f(x)$ dans l'intervalle ouvert de convergence.
   (c) Déterminer la loi de X.

Exercice 303. Centrale PSI 2017

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p. Déterminer les lois de $Z = \min(X, Y)$ et $T = X - Y$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 304. Centrale PSI 2017

On définit, s'il existe, le moment centré d'ordre n d'une variable aléatoire réelle X par $\mu_n(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X))^n\right]$.
Si $\mu_2(X)$ et $\mu_4(X)$ existent et que $\mu_2(X) \neq 0$, on définit le kurtosis de X par $K(X) = \dfrac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2} - 3$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
   Montrer que si X possède un kurtosis, alors $\alpha X + \beta$ en possède un aussi, et on a $K(\alpha X + \beta) = K(x)$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \left]0;1\right[$.
   Montrer que X possède un kurtosis et le calculer.
3. Montrer que toute variable aléatoire X possédant un kurtosis vérifie $K(X) \geqslant -2$.

Exercice 305. Centrale PSI 2017

Soit $p \in \left]0;1\right[$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $T_n = \dfrac{1}{S_n}$ et $m_n = \mathrm{E}(T_n)$ si elle existe.

1. Calculer $\mathrm{E}(X_1)$ et $\mathrm{E}(S_n)$
2. Montrer que $m_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer que pour tout $i \in [[1;n]]$, $\mathrm{E}\left(\dfrac{X_i}{S_n}\right) = \dfrac{1}{n}$.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathrm{E}\left(\dfrac{S_k}{S_n}\right) = 1 + \dfrac{(k-n)m_n}{p}$ si $k \geqslant n$ et $\mathrm{E}\left(\dfrac{S_k}{S_n}\right) = \dfrac{k}{n}$ sinon.

Exercice 306. CCP 2017 Fleury

Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, n joueurs lancent une pièce équilibrée simultanément. On dit que la partie fait "un tour" lorsque tous les joueurs sauf un ont obtenu la même face lors du lancer. Ce joueur est alors déclarer perdant. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de tours nécessaires pour qu'il y ait un perdant.

1. Calculer la probabilité p_n qu'il y ait un perdant au premier tour.
2. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3. Le perdant est éliminé et les deux derniers sont déclarés vainqueurs.
   Calculer le temps moyen (en tours) nécessaire pour qu'il y ait deux vainqueurs.

*corrigé

Exercice 307. CCP PSI 2017

Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de même paramètre $p \in \left]0;1\right[$. Soit la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $N+1$ suit une loi géométrique de paramètre p.

On définit la variable aléatoire $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
2. Soit $x \in \left]-1;1\right[$ et $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.
3. Déterminer la loi de Y.

*corrigé

Exercice 308. Mini Mines 2017 Beraud

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Définir la loi de X.
2. Exprimer l'espérance et la variance de X.
3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ telles que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de $X+Y$.

*corrigé

Exercice 309. Saint-Cyr Math 2017 Medico

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ strictement positif. et Y une variable aléatoire à valeurs entières telle que la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ où $n \in \mathbb{N}$ soit une loi binomiale de paramètres n et p. Déterminer la loi de Y et la reconnaître. *corrigé

Exercice 310. Mines-Ponts PSI 2017

1. Écrire le développement en série entière de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

2. À quelle condition sur r peut-on définir une variable aléatoires X telle que :
   $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{(2n)!r}{2^{3n}(n!)^2}$?
3. Montrer que lorsque cette condition est réalisée, X admet une espérance et une variance. Les calculer.

Exercice 311. Centrale PSI 2017

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, ne prenant que les valeurs 1 et -1 avec la même probabilité de $\dfrac{1}{2}$. Soit $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des réels et $S_n = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$.

1. Calculer l'espérance $\mathrm{E}(S_n)$ et l'écart-type σ_n de S_n.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(\mathrm{t}) \leqslant \exp\left(\dfrac{\mathrm{t}^2}{2}\right)$.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda S_n}\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}\right)$.
4. Montrer que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{E}\left(S_n^{2q}\right) \leqslant 2\dfrac{(2q)!}{\lambda^{2q}}\exp\left(\dfrac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}\right)$.

Exercice 312. Centrale PSI 2017-Python

On utilise une pièce dont le lancer donne pile avec la probabilité $p \in]0;1[$.
On note E_n l'événement : "ne pas obtenir 2 piles d'affilée au cours des n premiers lancers". Soit $p_n = \mathbf{P}(E_n)$.

1. Écrire un programme en python qui prend n et p pour paramètres et renvoie **True** si E_n est réalisé et **False** sinon.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+2} = (1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n$. et en déduire que l'événement "obtenir deux piles d'affilée sur un nombre infini de lancers" est presque sûr.
3. Écrire une fonction en python de paramètre n qui donne la probabilité p_n, pour p fixé.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et T la variable aléatoire égale à n lorsque l'on obtient pile aux lancers $n-1$ et n, E_{n-1} étant réalisé.
   Écrire une fonction en python de paramètre d'entrée n donnant $\mathbf{P}(T = n)$.
5. Donner la fonction génératrice de T, montrer que T admet une espérance et la calculer.
6. Écrire un programme qui vérifie la valeur de cette espérance.

Exercice 313. CCP PSI 2017

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X \leqslant n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^n\,\mathrm{d}\,t$.
2. En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^n\,\mathrm{d}\,t$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Donner la fonction génératrice de G_X de X. Que valent $G_X(1)$ rte $G_X(-1)$?
4. En déduire la probabilité que X soit paire.
5. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1;2\}$ et indépendante de X.
   Calculer $\mathbf{P}(XY \text{ est paire})$.

*corrigé

4 Informatique

Exercice 314. Centrale PSI 2017-Python

Soit f une fonction non identiquement nulle, continue et positive définie sur $[0;1]$. On note $M = \sup_{x\in[0;1]} \{f(x)\}$.

On choisit $f_1 : x \mapsto x(1-x)(1+\cos(5\pi x))$

1. Tracer le graphe de f_1 sur $[0;1]$ et déterminer une valeur approchée de M.
2. Écrire une fonction prenant en argument n et retournant $I_n = \int_0^1 (f(x))^n \,\mathrm{d}x$.
3. Tracer le graphe de $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} I_k x^k$ sur $[-a;a]$ où $a = \frac{1}{M} + 0,1$ pour $f = f_1$. et $n \in \{10,20,30,40,50\}$. Commenter.
4. Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.
5. Soit $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$. Tracer les points $A_n(n,u_n)$ pour les 30 premières valeurs et $f = f_1$. Que conjecturer ?
6. Étudier la monotonie et la convergence de (u_n).

Exercice 315. Centrale PSI 2017-Python

Soit $P \in \mathbb{C}_p[X], Q \in \mathbb{C}_q[X]$ et u définie sur $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ par $u(A,B) = AP + BQ$.
Soit $\mathcal{B} = \big((1,0),(X,0),\cdots,(X^{q-1},0),(0,1),(X,1),\cdots,(X^{q-1},1),\cdots(0,X^{p-1}),(X,X^{p-1}),\cdots,(X^{q-1},X^{p-1})\big)$ une base de $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$

1. Donner la matrice $M_{P,Q}$ de u dans $\mathcal{B}$ en fonction des coefficients de P et Q.
2. Écrire un programme en python qui prend les listes associées aux coefficients de P et de Q en paramètre et donne la matrice $M_{P,Q}$.
3. On choisit $P(X) = X^4 + X^3 + 1$ et $Q(X) = X^3 - X + 1$. Montrer que :
   $\exists!(A_0,B_0) \in \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_3[X]$ tel que $A_0P + B_0Q = 1$.
4. On choisit $P(X) = (X-1)(X-2)(X+2)$ et $Q_a(X) = X(X-1)(X-a)$.
   Tracer sur $[-2,1;2,1]$ la courbe de la fonction $d : t \mapsto \det(M_{P,Q_t})$.

Exercice 316. ENSAM Info 2017 Louvet

Une fourmi se déplace sur un quadrillage avec une probabilité $p = \frac{1}{4}$ pour qu'elle se déplace dans les 4 directions.

1. Écrire une fonction **deplacement** qui n'a pas d'argument en entrée et qui retourne une des listes $[0,1],[0,-1],[1,0]$, ou $[-1,0]$ chacune avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
2. Écrire une fonction **C2** qui ne prend pas de paramètre en entrée et qui renvoie la liste des coordonnées suivies par une fourmi débutant aux coordonnées $[0,0]$ jusqu'au moment où elle sort du carré de centre $[0,0]$ et de côté de longueur 2.
3. Écrire une fonction **Ca** qui prend le paramètre entier pair $a \geqslant 2$ en entrée et qui renvoie la liste des coordonnées suivies par une fourmi débutant aux coordonnées $[0,0]$ jusqu'au moment où elle sort du carré de centre $[0;0]$ et de côté de longueur a.
4. Tracer sur un graphe 5 fois le déplacement de la fourmi pour $a = 10$.
5. ...

*corrigé

Exercice 317. ENSAM. python PSI 2017

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que fait l'instruction `list(str(n))` ?
2. Écrire une fonction `facto(n)` qui renvoie $n!$.

3. Soit Σ l'ensemble des entiers naturels égaux à la somme des factorielles de leurs chiffres (par exemple $145 \in \Sigma$ car $145 = 1! + 4! + 5!$).
   On note $\sigma(n)$ la somme des factorielles des chiffres de n. On a donc $\Sigma = \left\{n \in \mathbb{N}, \sigma(n) = n\right\}$.
   (a) Soit n un entier à p chiffres. Montrer que : $\sigma(n) \leqslant 9!p$ et $n \geqslant 10^{p-1}$.
   (b) En calculant les premières valeurs de la suite $u(p) = \dfrac{10^{p-1}}{9!p}$, trouver un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $u(p) > 1$.
   (c) Déterminer Σ.

Exercice 318. ENSAM. python PSI 2017

1. Soit $p \in \left[0;1\right]$. Écrire une fonction prenant en argument p et renvoyant la valeur 1 avec probabilité p, la valeur -1 avec probabilité $1-p$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :
   pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = -1) = 1-p$.
   On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
   Écrire une fonction d'arguments p et n, et qui renvoie la liste $\left[S_0, S_1, \cdots, S_n\right]$.
   Conjecturer la limite de la suite (S_n) en fonction de p.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $T_n = \min\left\{k \in \mathbb{N},\ |S_k| = n\right\}$. Écrire une fonction d'arguments p, n et un entier $N > 0$, qui renvoie une liste de N tirages de la variable aléatoire T_n.

Exercice 319. ENSAM. python PSI 2017

1. Définir en Python la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^4}$.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$. Tracer $F(n)$ pour n variant de 10 à 100.
   Que peut-on en déduire pour la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$?
3. On admet que pour tout $p > 0$, $I_p = \displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \dfrac{1}{3p^3}$. Calculer I à 0.01 près.

Exercice 320. ENSAM. python PSI 2017

Un entier palindrome est un entier qui est égal à son « renversé» : 121 et 1234321 le sont, pas 56.

1. Tester `list(str(123))` et `list(reversed([1,2,3]))`. Écrire une fonction `estPalindrome(n)` qui renvoie un booléen indiquant si n est un entier palindrome ou non.
2. Écrire une fonction `verlan(n)` qui renvoie le « renversé» de n.
   Test : vérifier que `verlan(65)` renvoie 56.
3. On note r la fonction qui à n associe la somme de n et de son renversé. Écrire une fonction `palindrome(n,N)` qui renvoie la liste $\left[n, r(n), r^2(n), \ldots, r^k(n)\right]$ s'il existe $k \leqslant N$ tel que $r^k(n)$ soit un palindrome. Sinon cette fonction renvoie `False`.
   Tests : vérifier que `palindrome(64,50)` renvoie $\left[64, 110, 121\right]$ et `palindrome(98,20)` renvoie `False`.

Exercice 321. ENSAM. python PSI 2017

1. Écrire une fonction `rectangles(a,b,f,n)` qui donne une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f$ par la méthode des rectangles. Tester avec la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. Écrire une fonction `simpson(a,b,f,n)` qui donne une valeur approchée de cette même intégrale à l'aide de la méthode de Simpson :

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(a+hi)+f(a+h(i+1))+4f\left(a+h\left(i+\frac{1}{2}\right)\right)\right).$$

Comparer avec les résultats de la question 1) pour la fonction g.

3. Donner l'ordre de la méthode de Simpson, *i.e.* donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de :
$$\left|\int_a^b f - \frac{b-a}{6n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(a+hi)+f(a+h(i+1))+4f\left(a+h\left(i+\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right|.$$

Exercice 322. ENSAM. python PSI 2017

1. Écrire un programme `EstCube(n)` qui vérifie si n est un cube. Afficher les 300 premiers cubes.
2. Écrire un programme `S2Cubes(n)` qui vérifie si n est somme de deux cubes.
3. Écrire un programme `S4Cubes(n)` qui vérifie si n est somme de quatre cubes.
4. Écrire un programme `S8Cubes(n)` qui vérifie si n est somme de huit cubes.
5. Calculer la complexité de la fonction S8Cubes en fonction de n.

Exercice 323. ENSAM PSI 2017 - Python

1. Écrire une fonction **sym** prenant en argument $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qui renvoie **True** si M est symétrique et **False** sinon.
2. Écrire une fonction **decomp** prenant en argument M et qui renvoie l'unique couple $(A,S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = A+S$.
3. Écrire une fonction **ortho** prenant en argument $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qui renvoie **True** si M est orthogonale et **False** sinon.

Exercice 324. ENSAM PSI 2017 - Python

On appelle nombre parfait un entier n égal à la somme de ses diviseurs autres que lui même, et nombres amicaux deux entiers x et y tels que la somme des diviseurs de x autre que lui même vaille y et vice-versa.
Par exemple 6 est un nombre parfait car la liste de ses diviseurs est $\{1;2;3;6\}$ et $6 = 1+2+3$.

1. Écrire une fonction **diviseurs** qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la liste de ses diviseurs. La tester pour $n = 100$.
2. Écrire une fonction **sommediviseurs** qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la somme de ses diviseurs. La tester pour $n = 100$.
3. Écrire une fonction **parfaits** qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la liste des nombres parfaits inférieurs ou égaux à n et indiquant "k est parfait" pour chaque entier k parfait inférieur ou égal à n. La tester pour $n = 500$.
4. Écrire une fonction **amicaux** qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la liste des couples de nombres amicaux inférieurs ou égaux à n. La tester pour $n = 1500$.

*corrigé

Exercice 325. ENSAM PSI 2017

On note u la liste contenant les $n+1$ termes $(u_0, u_1, \cdots, u_n)$. Soit la liste v des termes $v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}$ définis par $\forall k \in [[0;n-1]],\ v_k = u_{k+1} - u_k$.

1. Écrire une fonction **differences** prenant en argument une liste u et renvoyant la liste v associée.
2. Écrire une fonction **nbiterations** prenant en argument une liste u et renvoyant le nombre de fois que l'on doit appliquer la fonction **differences** à cette liste pour que tous ses éléments obtenus de la liste obtenue soient nuls ou que cette liste soit vide.

Exercice 326. ENSAM PSI 2017 - Python

Un 2-palindrome est un nombre dont l'écriture binaire est un palindrome, *i.e.* qui est identique si on la lit de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche.

1. Écrire une fonction qui prend en argument un nombre entier naturel et renvoie son écriture en binaire.
2. Écrire une fonction qui prend en argument un nombre entier naturel et renvoie le nombre de 1 présents dans son écriture en binaire.
3. Écrire une fonction qui prend en argument un nombre entier naturel et renvoie **True** si ce nombre est un 2-palindrome et **False** sinon.
4. Écrire une procédure qui compte le nombre de 2-palindromes inférieurs à 100.